



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
XXXIX CONCURSO ANUAL DE MATEMÁTICAS DEL  
SURESTE



FASE ESCRITA

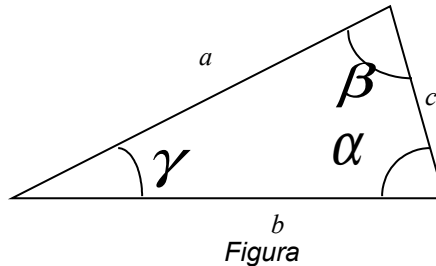
1. Se tienen dos números  $a$  y  $b$  tales que  $a + b = 1$  y  $a^2 + b^2 = 2$ . Determina el valor de  $a^3 + b^3$ .  
(10 puntos)

2. El número  $\phi$  es una raíz de la ecuación  $x^2 - x - 1 = 0$ . Demuestra que  $\phi^7 = 8 + 13\phi$ . (10 puntos)

3. Determina el valor exacto de  $\tan 2x$  si  $\sin x = \frac{4}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  (8 puntos)

4. Muestra que para cualquier triángulo (ver Figura), se cumple que:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{\cos \alpha}{a} + \frac{\cos \beta}{b} + \frac{\cos \gamma}{c}$$



(12 puntos)

5. En una ciudad se publican tres periódicos A, B y C. Suponga que 60% de las familias están suscritas al A, 50% al B y 50% al C. 30% de las familias lo están en A y B, el 20% en B y C, 30% en A y C y 10% en los tres. Calcula la probabilidad de que una familia escogida al azar este suscrita al periódico A si se sabe que lo está en por lo menos dos periódicos. (10 puntos)

6. Supongamos que tenemos 3 tarjetas idénticas en forma, salvo que ambas caras de la primera tarjeta son de color rojo, ambas caras de la segunda tarjeta son de color negro y una cara de la tercera tarjeta es de color rojo y la otra de color negro. Las tres tarjetas se mezclan en un sombrero y se extrae una al azar y se coloca en el suelo. Si la parte superior de la tarjeta elegida es de color rojo, ¿cuál es la probabilidad de que la otra parte sea de color negro? (10 puntos)

7. En la florería “El Edén” cada rosa cuesta \$13.00. Con motivo del día de San Valentín, se realiza la siguiente promoción: a partir de la segunda rosa, cada una tendrá un descuento de \$0.25 respecto del precio anterior. Esta promoción se aplica hasta un máximo de 50 rosas. Si se compran 50 rosas, ¿cuánto es el ahorro por la promoción comparado con el precio normal? (10 puntos)

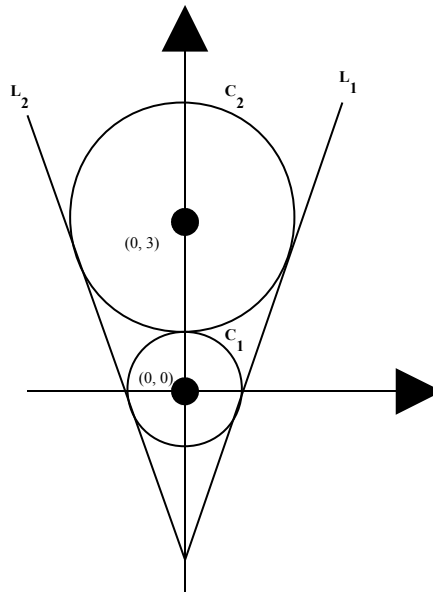


FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
XXXIX CONCURSO ANUAL DE MATEMÁTICAS DEL  
SURESTE

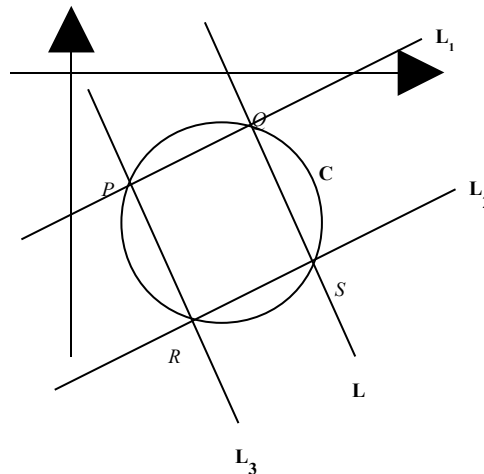


FASE ESCRITA

8. Demuestra que de todos los rectángulos del mismo perímetro, el cuadrado es el de área máxima. **(10 puntos)**
9. Considera las circunferencias con centros en  $(0, 0)$  y  $(0, 3)$  y radios 1 y 2, respectivamente. Sean  $L_1$  y  $L_2$  las dos tangentes comunes a las circunferencias que no pasan por el punto de tangencia de  $C_1$  y  $C_2$ . Halla el ángulo entre  $L_1$  y  $L_2$ . **(10 puntos)**



10. Sea  $C$  la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x + 3y + 5 = 0$  y  $L$  la recta  $2x + y - 3 = 0$ . Halla la ecuación de las rectas que determinan los lados del rectángulo inscrito en  $C$  y que tiene por base el segmento de  $L$  que yace dentro de  $C$ . **(10 puntos)**



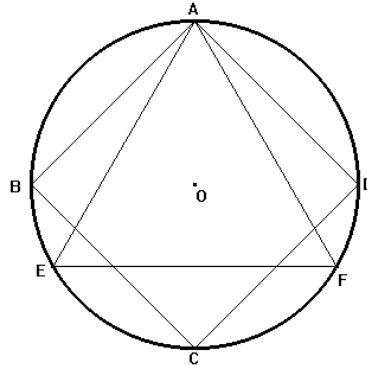


FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
XXXIX CONCURSO ANUAL DE MATEMÁTICAS DEL  
SURESTE



FASE ESCRITA

11. En un círculo de radio  $R$  se han inscrito un cuadrado y un triángulo equilátero que tienen un vértice en común. Calcula en términos de  $R$ , el área que resulta de la intersección de estas figuras. **(10 puntos)**



12. En los catetos  $AC$  y  $BC$  del triángulo  $ABC$  se han construido (fuera del triángulo) los cuadrados  $ADKC$  y  $CEMB$ . De los puntos  $D$  y  $M$  se bajan las perpendiculares  $DH$  y  $MP$  sobre la continuación de la hipotenusa  $AB$ . Demuestra que  $DH + MP = AB$ . **(10 puntos)**

