UADY

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

Maestría en Ciencias Matemáticas
Examen de Admisión 2015
Álgebra Lineal

Nombre:

1. **(10 puntos.)** Sea A una matriz de $n \times n$ sobre los complejos tal que

$$A^3 - 2A + I = 0.$$

Muestre que $\det(A) \neq 0$ y encuentre la inversa de $(2A)$.

2. **(10 puntos.)** Halle los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 1 &= 0 \\ 4x - 2\alpha y + 5z - 2 &= 0 \\ x - y + \alpha z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

tenga

a) solución única y halle dicha solución.

b) soluciones infinitas y halle estas soluciones.

c) no tenga solución.

3. **(10 puntos.)** Sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y considere la función $f : V \to V$ dada por

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si} \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ 0 & \text{si} \quad i = n. \end{cases}$$

a) Determine una transformación lineal $T : V \to V$ tal que $T(v_i) = f(v_i)$.

b) Determine el núcleo de T exhibiendo una base del mismo.

c) Determine la imagen de T hallando una base.

d) Calcule los valores propios de T.

4. **(10 puntos.)** Sea A una matriz de $n \times n$ cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - c)^n$. Demuestre que A es diagonalizable si y solamente si $A = cI_n$, donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$.

5. **(10 puntos.)**

a) Demuestre que los polinomios $1 - x + x^2$, 1, $1 + x + x^2$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

b) ¿Existen polinomios $a(x), b(x), c(y), d(y)$ tales que

$$1 + xy + x^2y^2 = a(x) \cdot c(y) + b(x) \cdot d(y)?$$