

Álgebra Lineal

Maestría en Ciencias Matemáticas

1. Resuelva el siguiente sistema usando la factorización LU o $P^T LU$ (según sea el caso).

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = -3 \\ 2x - y - z = -1 \end{cases}$$

2. Calcule A^{-1} usando el algoritmo de Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Halla el valor de t para el cual el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 4x - 2ty + 5z = 2 \\ x - y + tz = -1 \end{cases}$$

- (a) tiene solución única y *resuelve* el sistema para esos valores de t .
- (b) tiene infinidad de soluciones.
- (c) no tiene solución.

4. Suponga que A y B son matrices de $n \times n$ en un campo K . Demuestra que

$$\left[(\lambda AB)^{-1} \right]^T = \lambda^{-1} (A^T)^{-1} (B^T)^{-1}.$$

5. Sea V un K -espacio vectorial y sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ vectores de V . Demuestra que el subespacio generado por estos vectores es el menor de todos los subespacios de V que contienen a éstos.
6. Sea $A \in M_n(K)$ y sea $b \in M_{n \times 1}(K)$. Demuestra que si A es una matriz invertible, entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución y además, ésta es única.
7. Determine si el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } x \geq y \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto por escalar usuales.

8. Sea W el conjunto de todos los $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathbb{R}^5$ que satisfacen

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Encontrar un conjunto finito de vectores que genera a W .

9. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente de un K -espacio vectorial V y $c_1, \dots, c_n$ escalares distintos de cero fijos de K . Pruebe que $\{c_1v_1, \dots, c_nv_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de V .
10. Demostrar que un subespacio de $\mathbb{R}^2$ es $\mathbb{R}^2$ o el subespacio nulo o consta de todos los múltiplos escalares de algún vector fijo de $\mathbb{R}^2$.
11. Sea $V = \mathbb{R}[t]_2$ el espacio de todos los polinomios en la variable t con coeficientes reales de grado menor o igual a 2.
- (a) Encuentre el vector de coordenadas de $p(x) = 2 - t + 3t^2$ con respecto a la base $\beta = \{1 + t, 1 - t, t^2\}$.
- (b) Extienda el conjunto linealmente independiente $\{1 + t, 1 + t + t^2\}$.
12. Suponga que V es un espacio vectorial con base $\{x_1, x_2, x_3\}$. Demuestre que $\{x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3\}$ también es una base para V .
13. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K y suponga que X, Y son subconjuntos de V . Demuestre lo siguiente:
- (a) Si $X \subset Y$ entonces $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$.
- (b) Si $X \subset \langle Y \rangle$ entonces $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$.
- Donde $\langle A \rangle$ denota el espacio generado por A .
14. Encontrar y describir el mayor número posible de vectores linealmente independientes de los siguientes vectores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

15. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$. Si $V' \subseteq \mathbb{R}^3$ es una línea que pasa por el origen y $V'' \subseteq \mathbb{R}^3$ es un plano que pasa a través del origen pero no contiene a V' , muestre que $V' \oplus V'' = \mathbb{R}^3$.

16. Halla la dimensión del siguiente subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-2c \\ a+b-2c+d \\ -2a+2b+4c-d \\ b+d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

17. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ k^2 - 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \right\rangle.$$

18. Suponga que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$. Muestra que si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_n\}$ es también una base para $\mathbb{R}^n$.

19. Sea $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base para un espacio vectorial V y sean $u_1, \dots, u_k$ vectores en V . Si $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ es linealmente independiente sobre V , demuestra que $\{[u_1]_\beta, [u_2]_\beta, \dots, [u_k]_\beta\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}^n$.

20. Suponga $\{u_1, u_2, u_3\}$ es *linealmente independiente*, y que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es linealmente dependiente. Muestra que $u_4 \in \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

21. Los vectores $v_1 = (1, 2, 3)^t, v_2 = (2, 5, 3)^t, v_3 = (1, 0, 10)^t$ forman una base para $\mathbb{R}^3$. Si $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la transformacin lineal definida por

$$T(v_1) = (1, 0)^t, T(v_2) = (1, 0)^t, T(v_3) = (0, 1)^t,$$

halla $T(v)$, donde $v = (1, 1, 1)$.

22. Sea $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $\beta = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ es la base canónica para V . Defina los mapeos $S, T : V \rightarrow V$ de la siguiente manera

$$T(A) = \frac{1}{2}(A - A^t), S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t).$$

- (a) Prueba que S y T son lineales.
- (b) Halla $[S]_\beta$ y $[T]_\beta$.
- (c) Encuentra bases para $\text{Ker}(S)$ y $\text{Im}(S)$, $\text{Ker}(T)$ y $\text{Im}(T)$.
- (d) Prueba que $S \circ S = S$ y $T \circ T = T$.
- (e) Pruebe que $S \circ T = 0$ y $T \circ S = 0$.
- (f) Pruebe que $S + T = I_V$.

23. Sean $T : U \rightarrow V$ y $S : V \rightarrow W$ dos transformaciones lineales. Probar que

- (a) $\text{rango}(S \circ T) \leq \text{rango}(S)$. (Sugerencia: Demuestra que $\text{Im}(S \circ T) \subseteq \text{Im}(S)$.)
- (b) $\text{rango}(S \circ T) \leq \text{rango}(T)$. (Sugerencia: Demuestra que $\text{Ker}(S \circ T) \subseteq \text{Ker}(S)$.)

- (c) Si T es suprayectiva, entonces $\text{rango}(S \circ T) = \text{rango}(S)$.
- (d) Si S es inyectiva, entonces $\text{rango}(S \circ T) = \text{rango}(T)$.
24. Sean u_1, u_2, u_3 una base para $\mathbb{R}^3$ y sean v_1, v_2, v_3 cualesquiera vectores de $\mathbb{R}^3$. Si T es un operador lineal tal que $T(u_i) = v_i$ para $i = 1, 2, 3$. Muestra que $T = T_A$, donde A es la matriz de 3×3

$$A = [v_1|v_2|v_3][u_1|u_2|u_3]^{-1}.$$

25. La función $T : V \rightarrow W$ es tal que $[T]_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ donde β y β' son bases de V y W respectivamente. ¿Es T invertible?
26. Considere al conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, el campo de los números naturales.
- (a) Demuestre que $\beta = \{1, i\}$ es una base para $\mathbb{C}$.
- (b) Si $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es la transformación lineal dada por $T(a + bi) = a - bi$, determine $[T]_{\beta}$.

27. Considere las funciones proyección sobre $\mathbb{R}^n$ dadas por

$$\pi_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i.$$

Demuestre que $\beta = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$ es una base de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

28. Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 y sea $\beta = \{v_1, v_2\}$ una base para V . Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal tal que

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si $[T]_{\beta} = P \begin{pmatrix} -10 & -14 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} P^{-1}$, donde $P = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, determine una base β' para V de tal manera que $[T]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -10 & -14 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. (Observe que la base β' debe estar en términos de v_1 y v_2).

29. Sea V un espacio vectorial, $S, T, U \subset V$ subespacios, y supongamos que

$$S \cap T = S \cap U, \quad S + T = S + U, \quad \text{y} \quad T \subset U.$$

Muestre que $T = U$. ¿Puede alcanzarse la solución si se elimina alguna de las tres hipótesis?

30. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \rightarrow V$ un mapeo lineal. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\ker T \cap \text{Im } T = \{0\}$.
- (b) Para todo $v \in V$, $T(T(v)) = 0$ se tiene que $T(v) = 0$.

31. Halla los valores propios, subespacios propios, multiplicidades geométricas y algebraicas de la matriz identidad de 3×3 .

32. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determina el polinomio característico de A .
- (b) Determina los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas.
- (c) Determina los espacios propios asociados a cada valor propio de A y sus multiplicidades geométricas.
- (d) ¿Es A diagonalizable? Justifique su respuesta.

33. Una matriz A es idempotente si $A^2 = A$. Demuestra que los únicos valores propios posibles de una matriz idempotente son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

34. Sea M una matriz de tamaño $n \times n$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distintos autovalores de M con sus correspondientes autovectores $v_1, v_2, \dots, v_m$. Demuestre que $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es un conjunto linealmente independiente.

35. Suponga que A es una matriz de 2×2 con polinomio característico $\chi_A(X) = X^2 + aX + b$. Demuestre que

$$A^3 = (a^2 - b)A + abI_n$$

¿Puede hallar una fórmula (en términos de A) para calcular A^{-1} ? (Sugerencia: Para obtener la fórmula para A^{-1} debe poner condiciones extras a b .)

36. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $\dim(V) = n < +\infty$, sea $T \in \text{Hom}(V, V)$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Demuestre que

$$\text{Spec}(\alpha T + \beta I) = \alpha \text{Spec}(T) + \beta.$$

37. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el operador lineal dado por $T(x, y, z) = (y - z, x + z, y - x)$.

- (a) Demuestra que T es invertible.
- (b) Encuentre el polinomio característico de T .
- (c) Halle los valores propios de T .