UADY
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

Maestría en Ciencias Matemáticas
Examen de Admisión 2016
Álgebra Lineal

Nombre: ______________________________

1. (10 puntos) Determine las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir b_1, b_2 y b_3 para que el sistema
$$\begin{aligned} x + 2y + 7z &= b_1 \\ -x + y - z &= b_2 \\ 3x - 2y + 5z &= b_3 \end{aligned}$$
tenga solución.

2. (10 puntos) Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Suponga que $\{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_r\} \subseteq V$ es un conjunto de vectores linealmente independiente tal que $\{v_1, \ldots, v_s\}$ es una base para $\ker(T)$. Pruebe que $\{T(v_{s+1}), \ldots, T(v_r)\}$ es linealmente independiente.

3. (10 puntos) Sean $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\beta' = \{w_1, w_2\}$ bases para los espacios vectoriales reales V y W, respectivamente; sea $T\colon V \to W$ la única transformación lineal tal que $Tv_1 = -w_1 + w_2$, $Tv_2 = w_1 - w_2$ y $Tv_3 = -w_1 + w_2$. Encuentre bases para el núcleo y la imagen de T.

4. (10 puntos) Sea $\mathbb{R}[t]_2$ el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual a uno. Considere la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[t]_2$ dada por $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a + 2b) + (3a + 5b)t$. Encuentre una base β para $\mathbb{R}^2$ de tal manera que la matriz de T respecto de las bases β y $\beta' = \{1 + t, t\}$ sea $\begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}$.

5. (10 puntos) Sea $\mathbb{R}[t]_4$ el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual a tres y $p'(t)$ la derivada de $p(t)$. Sea $L\colon \mathbb{R}[t]_4 \to \mathbb{R}[t]_4$ dado por $L\,(p(t)) = p(t) + p(1)(t - 3) - 2p'(1)(t - 1)$. Halla

   a) los valores propios de L y sus multiplicidades (algebraicas),

   b) los espacios propios de L.

   c) ¿es L diagonalizable?

   (Sugerencia: toma como una base para $\mathbb{R}[t]_4$ al conjunto $\{(t - 1)^3, (t - 1)^2, (t - 1), 1\}$).