

Estimación de parámetros de las superficies de una lente oftálmica progresiva a partir del trazo de rayos

Por:

L.E.M Alejandro Téllez Quiñones

Asesores:

Dr. Gerardo Emilio García Almeida

Dr. Ricardo Legarda Sáenz

Universidad Autónoma de Yucatán

Facultad de Matemáticas

2 de noviembre de 2008

A mi familia, amigos y maestros...

Puede que no comprenda en su totalidad a las maravillosas mentes de los matemáticos en sus abstracciones, pero espero entender lo necesario y suficiente que me permita apreciar, lo que para el ser ordinario es de sublime naturaleza y al mismo tiempo, ínfimo en su trivialidad.

EL AUTOR.

Índice general

Prefacio.	4
1. Introducción.	5
1.1. Ejemplo de un típico problema de tomografía óptica.	8
2. Aspectos teóricos.	11
2.1. El cálculo de variaciones, planteamiento de un problema variacional.	11
2.2. El problema en tres dimensiones.	12
2.3. El problema en forma paramétrica.	13
2.4. Aplicaciones a la óptica geométrica.	16
2.5. La integral de Hilbert.	18
2.6. Frente de onda.	20
2.7. Sistema de rayos ortonómicos.	21
2.8. Trazo de rayos y obtención de la longitud de camino óptico.	25
3. Planteamiento de un problema de retroproyección.	29
3.1. El problema directo.	29
3.2. El problema inverso.	30
3.3. Reconstruyendo las superficies y la perturbación.	31
3.4. Dificultad del problema de retroproyección: Un problema de costo computacional.	32
4. Primera etapa: Obteniendo las superficies de la lente.	34
4.1. Descripción y notación.	34
4.2. El problema.	36
4.3. Detalles de optimización.	38
4.4. Diferenciabilidad de las funciones de proyección.	40
4.5. Ejemplo y resultados para un caso particular de lente.	47
4.6. Observaciones.	57

5. Segunda etapa: Trabajando con asféricas no cónicas.	58
5.1. Cálculo de la intersección rayo-superficie.	59
5.2. Escalamiento.	60
5.3. Experimentos numéricos.	61
5.4. Observaciones.	72
6. Tercera etapa: Estimando en subespacios 2-dimensionales.	73
6.1. Resultados de minimización en subespacios 2-dimensionales.	73
6.2. Observaciones.	83
7. Conclusiones y reflexiones finales.	84
Bibliografía.	88

Prefacio.

El problema de reconstruir la distribución del índice de refracción en un medio por el cual pasan rayos de luz, a partir de longitudes de camino óptico, es el tema central de lo que se conoce como tomografía óptica [1]. La tomografía en general [2], es una técnica matemática que trata de reconstruir los valores de una función a partir de mediciones proporcionadas por sus proyecciones en espacios de dimensión más reducida, proyecciones que están representadas por integrales de línea. En el caso de la tomografía óptica, la función que se desea obtener es una que represente ya sea al índice de refracción o que esté relacionada con propiedades sobre la atenuación local del medio. La tomografía óptica también es un tema relacionado con la interferometría holográfica [1] o más propiamente interferometría óptica y tomografía ultrasónica computarizada según autores como Sweeney y Vest [3].

¿Qué ocurre cuando en vez de estas integrales de línea tenemos por proyecciones a conjuntos de posiciones y direcciones resultantes de la refracción de rayos ópticos al pasar por una lente oftálmica progresiva caracterizada por parámetros $\mathbf{x}^*$ y con índice de refracción conocido, partiendo de ciertas posiciones y direcciones iniciales? Si nuestro procedimiento de tomografía se interpreta ahora como el tratar de obtener $\mathbf{x}$ que genere rayos que tengan esas posiciones y direcciones resultantes y conocidas sin que necesariamente $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, nuestro problema se convierte en la estimación de parámetros $\mathbf{x}$ de una lente que generen una disposición de rayos dada.

En la *Introducción* (Capítulo 1) se describe de manera general un problema que desde el punto de vista matemático es similar al problema central de esta tesis. En los *Aspectos teóricos* (Capítulo 2), se definen conceptos importantes con los que el lector debe familiarizarse para una mayor comprensión del *Planteamiento de un problema de retroproyección* (Capítulo 3) desde un enfoque no sólo matemático como el cálculo variacional sino de una rama de la física, la óptica geométrica, pero desde luego de un modo muy general y no exhaustivo. En el Capítulo 3 se describe un problema complejo cuyas restricciones particularizan el caso simple que pretendemos resolver en esta tesis y en donde también se describe la solución propuesta a grandes rasgos, cuya noción queda mas clara a medida que avanzamos a los capítulos siguientes. La optimización matemática como base para la implementación computacional también está presente, abordando propiamente una breve descripción de esta rama y de los métodos particulares seleccionados en la *Primera etapa: Obtención de las superficies de la lente* (Capítulo 4). En esta etapa de prueba de experimentos con superficies cónicas simples, verificamos si nuestras suposiciones pueden encaminarnos a la solución de nuestro problema central y posteriormente en la *Segunda etapa: Trabajando con esféricas no cónicas* (Capítulo 5) generamos los experimentos que nos dan pauta para concluir el objetivo de esta tesis. En el Capítulo 6, *Tercera etapa: Estimando en espacios 2-dimensionales*, mostramos los experimentos aplicados a un búsqueda de la solución en espacios de dimensión mas reducida, notando cómo en ciertos casos, el problema puede tener solución exacta bajo restricciones muy particulares. Finalmente, en el Capítulo 7, *Conclusiones y reflexiones finales*, se describen los resultados generales, basados en todos los experimentos realizados al aplicar las técnicas propuestas en el Capítulo 4 y se realizan comentarios respecto a detalles o mejoras en nuestra metodología y posibles trabajos a futuro.