

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

**Un algoritmo para la planificación
de movimientos en sistemas cinemáticos
estratificados**

Jorge Alberto Ríos Martínez

MÉRIDA, YUCATÁN, MÉXICO

2007

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Maestro en Ciencias Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Yucatán. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en la Facultad de Matemáticas bajo la dirección del Dr. Ramón Peniche Mena y del Dr. Luis Alberto Muñoz Ubando.

Jorge Alberto Ríos Martínez
rmartine@uady.mx

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
Mérida, Yucatán, 30 de abril de 2007.

Agradecimientos

Le doy gracias a mi familia por apoyarme en mis proyectos y estar ahí para animarme a concluir mi trabajo cuando sentía que no podía más.

Quiero agradecer también a mis asesores Dr. Luis Alberto Muñoz Ubando y Dr. Ramón Peniche Mena por los consejos y los conocimientos que me brindaron para lograr la conclusión de este trabajo.

Agradezco el apoyo económico que recibí de la Universidad Autónoma de Yucatán por conducto de la Facultad de Matemáticas para la realización de estos estudios de maestría.

Por último, éste trabajo también fue apoyado económicamente por parte del proyecto CONACyT 46274.

Resumen

En este trabajo se estudia un algoritmo general para la planificación de movimientos en sistemas cinemáticos estratificados [1], categoría en la cual se incluyen robots con patas con caminatas cuasiestáticas¹ y algunos modelos cinemáticos de manos robóticas.

Las soluciones que devuelve este método son composiciones de flujos sobre campos vectoriales que llevan el sistema de un punto inicial p a un punto final q , ambos en el espacio de configuraciones del robot. Este enfoque descansa sobre una sólida base matemática en términos de objetos de geometría diferencial como son las variedades y grupos de Lie.

La ventaja principal que ofrece este método es su generalidad, dado que es independiente de la geometría particular del robot, es decir, no depende del número de patas o el número de dedos. Se ofrece un par de ejemplos de aplicación en un robot hexápodo y uno cuadrúpedo.

Además se desarrolla el algoritmo original [9] y se explica cuál fue la extensión desarrollada por Goodwine y Burdick para aplicarlo a sistemas estratificados. También se proporciona un ejemplo para controlar un unicycle.

¹Cuando el centro de masa del robot está siempre soportado por al menos tres patas en contacto con el piso.

Índice general

1. Planificación de Movimientos	5
2. Planificación de movimientos y sistemas no holonómicos	10
2.1. Definición del Problema	10
2.1.1. Punto de vista de Teoría de control	12
2.1.2. Ejemplo	13
2.2. Control de Sistemas No holonómicos	16
2.2.1. Ejemplo de restricciones holonómicas	16
2.2.2. Otro ejemplo de modelo integrable	19
2.3. Determinar si un sistema es no holonómico	20
2.3.1. Ejemplo. Una foliación con hojas esféricas	21
2.3.2. Distribuciones	21
2.3.3. Prueba de integrabilidad	25
2.4. Controlabilidad	26
3. Planificación de movimientos en sistemas cinemáticos	30
3.1. La estrategia	31
3.1.1. El primer paso	32
3.1.2. Ejemplo Uniciclo	33
3.1.3. El segundo paso	35
3.1.4. Paso 2.1	36
3.1.5. Paso 2.2	38
3.2. Algoritmo iterativo	39
3.2.1. Corolario	39
3.2.2. Definición	39
3.2.3. Algoritmo	40
3.3. Ejemplo Uniciclo, continuación	40
3.3.1. Cambiando los puntos	44

3.3.2.	Convirtiendo el sistema a nilpotente	45
3.4.	Acerca de la implementación en Maple	47
3.5.	Simulación gráfica del unicycle	52
4.	Planificación en sistemas cinemáticos estratificados	55
4.1.	Espacio de configuraciones estratificado	57
4.2.	Sistemas estratificados suaves	61
4.2.1.	Prueba de controlabilidad	63
4.3.	Algoritmo para planificación de movimientos en sistemas es- tratificados	63
4.3.1.	Ejemplo de estratificación 1	63
4.3.2.	Ejemplo de estratificación 2	65
4.3.3.	Supuesto básico.	65
4.4.	Construcción del sistema estratificado extendido	66
4.5.	Algoritmo	68
4.6.	Cuestiones de estabilidad	69
4.7.	Aplicación en un robot hexápodo	71
4.7.1.	Acerca de la implementación en Maple	79
4.7.2.	Simulación gráfica	80
4.8.	Aplicación en un robot cuadrúpedo	80
4.8.1.	Elección de una base	92
4.8.2.	Acerca de la implementación en Maple	97
5.	Conclusiones y Trabajo Futuro	100
A.	Conceptos Matemáticos	103
A.1.	Variedades y grupos de Lie	103
A.2.	Bases de Philip Hall	110
A.2.1.	Ejemplo. Base de Philip Hall de orden 3	111
A.3.	Sistemas nilpotentes	112
A.3.1.	Ejemplo 1.	112
A.3.2.	Ejemplo 2.	112
A.4.	Cálculos formales	112
A.5.	Fórmula Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin	113
A.6.	Mapeo exponencial	113
A.6.1.	Ejemplo de grupo de Lie formal	114
A.7.	Rango	114
A.8.	Restricciones Pfaffianas	115

B. Listados de los programas	116
B.1. Programa en Maple para el uniclo	116
B.2. Programa en Maple para el hexápodo	119
B.3. Programa en Maple para el cuadrúpedo	126
B.4. Programa de simulación en OpenGL para el hexápodo	132