Proceso de Ingreso al Posgrado

Problemario para el examen de conocimientos específicos

A continuación se lista una serie de problemas ejemplo similares a los que incluirá el examen de conocimientos en Matemáticas y Programación para ingresar a la Maestría en Ciencias de la Computación. El examen tendrá una calificación global entre 0 y 100 puntos, los cuales se obtendrán de la ponderación de las calificaciones obtenidas en las secciones listadas a continuación:

Sección	Ponderación
Probabilidad y Estadística	20%
Álgebra Lineal	25%
Cálculo Diferencial e Integral	25%
Programación	30%
Total	**100%**

Matemáticas.

I. Probabilidad

1. En un paquete de notas para deducción fiscal se encontraron 400 con errores de tres tipos. El departamento de auditoría localizó los siguientes resultados: 50 tenían errores del tipo A; 48 del tipo B; 46 del tipo C; 38 de los tipos A y B; 37 de los tipos A y C; 35 de los tipos B y C, y 333 no traían error alguno. Determine cuántas de estas notas tienen los tres tipos de errores.

2. Unos amigos llegaron a una fonda a comer tacos al pastor. La mesera tomó la orden de tacos, los cuales 18 deberían tener cebolla, 23 salsa picante y 29 cilantro. Además, la mesera anotó que 9 sólo llevan cilantro y picante, 3 sólo picante, 8 sólo cilantro y 5 llevan los tres ingredientes. ¿Cuántos tacos llevan cebolla y picante pero no cilantro? ¿Cuántos no llevan picante? ¿Cuántos llevan sólo cebolla? ¿Si los tacos cuestan 3 pesos y se consumieron 4 refrescos de $8 pesos cada uno, cuánto tienen que pagar? ¿Cuántos amigos son?

3. En una escuela primaria de Los Ángeles, California, se halló que 40% de los niños eran de origen hispano; además se comprobó que 12% eran zurdos y 5% hispanos zurdos. Determine el porcentaje de pequeños que son diestros y de origen no hispano.

4. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 si no se permite repetir dígitos, ni iniciar con 0? ¿Cuántos números son pares? ¿Cuántos números son mayores de 2500?

5. Se desea formar una cifra de 4 dígitos con los números 2, 3, 5 y 8, pero sin repetirlos, es decir, empleando cada uno una sola vez en cada cifra, ¿cuántas cifras diferentes se obtienen? ¿cuánto sería la suma de todas las cifras?

6. Las barajas o naipes ordinarios constan de 52 cartas, divididas en 4 figuras de 13 cartas cada una. Las figuras son: espada (♠), trébol (♣), corazón (♥), y diamante (♦); y los valores de las cartas (de menor a mayor) son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K y A. En el juego de póker participan 4 jugadores quienes por separado reciben una mano de 5 cartas al azar. Una mano contiene una tercia cuando se obtienen 3 cartas del mismo número y las otras dos de números distintos; en tanto que el full consta de una tercia y un par. Determine la probabilidad de obtener una mano que contenga una tercia (que no sea full) y una mano que sea un full.

7. Dados los eventos A y B. Para $P(A^C) = ⅓$; $P(A \cap B) = ¼$; $P(A \cup B) = ⅔$; determine las probabilidades $P(B)$, $P(A \cap B^C)$ y $P(B-A)$.

8. Del conjunto de números N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} se elige uno. Determine la probabilidad de obtener un número impar, si se sabe que este número es primo.

9. Con base en los datos obtenidos por el Instituto Nacional de Investigación Dental, se ha determinado que el 42% de los jóvenes de 12 años nunca ha tenido caries, 34% de 13 años tampoco, ni 28% de los de 14 años. Si se elije un joven al azar de un grupo de 24 estudiantes, donde hay 6 de 12 años, 8 de 13 y 10 de 14, y el estudiante seleccionado no ha padecido de caries, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 14 años?

10. Un motor de automóvil tiene tres soportes independientes, cuyas probabilidades de romperse en un lapso de 10 años son 0.2, 0.4 y 0.3, respectivamente. Si el conductor del vehículo percibe el ruido característico de dos soportes quebrados, determine la probabilidad de que se hayan roto los soportes uno y dos.

II. *Estadística Descriptiva*

1. La siguiente tabla muestra una distribución de frecuencias de la duración de 400 reflectores probados en una empresa.

Vida media (horas)	300-399	400-499	500-599	600-699	700-799	800-899	900-999	1000-1099	1100-1199	Total
Número de reflectores	14	46	58	76	68	62	48	22	6	400

a) Determine los límites inferior y superior, el tamaño del intervalo, la marca, y las frecuencias relativa y acumulada de cada clase. Elabore un histograma que corresponda a la distribución de frecuencias absolutas.

b) Calcule la media, mediana, moda, varianza, desviación estándar de cada clase.

c) Calcule el porcentaje de reflectores cuya duración no es mayor de 600 horas; cuya duración es mayor o igual a 900 horas; cuya duración es entre 500 y 1000 horas.

2. El diámetro interno de las rondanas producidas por una empresa se mide con una exactitud de milésimas. Si las marcas de clase de una distribución de frecuencias de estos diámetros son 0.321, 0.324, 0.327, 0.330, 0.333 y 0.336, encuentre el tamaño del intervalo de clase, las fronteras de clase, y los límites de clase.

3. Un conjunto de números consta de 6 seises, 7, sietes, 8 ochos, 9 nueves y 10 dieces. Determina la media, mediana, moda, varianza y desviación estándar del conjunto.

4. El salario medio mensual pagado a todos los empleados de una empresa es de $ 5000. Los empleados varones reciben en promedio $ 5200 y las mujeres, $4200. Estime el porcentaje de varones y mujeres empleados en la empresa.

5. Si se suma el valor de 5 a cada uno de los elementos del conjunto {3, 6, 2, 1, 7, 5} se obtiene el conjunto {8, 11, 7, 6, 12, 10}. Determine la relación entre las medias y las desviaciones estándar de ambos conjuntos.

III. *Álgebra lineal*

1. Encuentra todos los valores de x tal que la siguiente matriz es una matriz singular.

$$A = \begin{bmatrix} x & x^2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Encuentra los valores de h para los cuales el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente.

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ -h \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2h \\ 3h+1 \end{bmatrix} \right\}$$

3. Sean A, B y C matrices invertibles de orden (n x n). Determina la matriz que se obtiene cuando se simplifica la expresión $C^{-1}(AB^{-1})^{-1}(CA^{-1})^{-1}C^2$

a) A	b) $C^{-1}A^{-1}BC^{-1}AC^2$	c) B
d) C^2	e) $C^{-1}BC$	f) C

4. Sea A la siguiente matriz invertible

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & -13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & -19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & -25 \end{bmatrix}$$

Sea *I* la matriz identidad de orden (5x5) y sea B una matriz de orden (5x5). Determine la matriz B suponiendo que $ABA^{-1}=I$

5. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales y proporciona la forma vectorial para la solución general.

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_3 - 2x_5 = 1\\
&x_2 + 3x_3 - x_5 = 2\\
&2x_1 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0
\end{aligned}
$$

6. Sea la matriz A con un eigenvalor 2. Encuentre una base del eigenespacio E_2 que corresponda al eigenvalor 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

7. La siguiente matriz representa la matriz aumentada para un sistema de ecuaciones lineales. Determina la forma vectorial para la solución general.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

8. Dadas las matrices A, B, C, determina el valor de V tal que $V^T = (A^T-(A-B)^T)\,C$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

9. Dada la función T: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, determina si T es una transformación lineal si está definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x + 1 \\ 3y \end{bmatrix}$$

10. Sea la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base para el espacio nulo N(A).

b) Encuentra una base para el rango R(A).

c) Encuentra una base del espacio fila para A.

11. Sea la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base para el rango R(A) de A que consista de las columnas de A.

b) Encuentra el rango y la nulidad de la matriz A.

IV. *Cálculo Diferencial e Integral*

1. ¿Cuáles funciones $f(x)$, $g(x)$, y $h(x)$ dan la composición de $h \circ g \circ f = \sin(1 + |x|)$?

a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = |x|$, $h(x) = 1 + x$

b) $f(x) = \sin|x|$, $g(x) = 1 + x$, $h(x) = x$

c) $f(x) = \sin(1 + x)$, $g(x) = |x|$, $h(x) = \sin x$

d) $f(x) = |x|$, $g(x) = 1 + x$, $h(x) = \sin x$

e) $f(x) = 1 + x$, $g(x) = |x|$, $h(x) = \sin|x|$

f) $f(x) = 1 + x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = |x|$

g) $f(x) = 1 + x$, $g(x) = |x|$, $h(x) = \sin x$

h) Ninguna de las anteriores.

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones es diferenciable en $x = 0$?

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

b) $g(x) = |x|$

c) $h(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0 \\ x + 5, & x \geq 0 \end{cases}$

d) $u(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

e) $v(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0 \\ 2x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$

f) $w(x) = \frac{|x|}{x}$

3. Si $\ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) = 2$, entonces $x =$

a) 2

b) e^2

c) $e^2 - 1$

d) $2^e - 1$

e) 2^e

f) Ninguna de las anteriores

4. ¿Cuál de las siguientes es una función impar?

a) $u(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x^2}$ b) $g(x) = \frac{x+1}{x^3+x+1}$ c) $f(x) = \frac{|x|}{x^4}$

d) $v(x) = \frac{\sin^2(x)-\cos^2(x)}{x^3}$ e) $h(x) = \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$ f) $w(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

5. Evalúa las siguientes integrales.

(a) $\int \left(1 - 2\sqrt{x}\right)^2 dx$

(b) $\int e^t \cos(3e^t) dt$

(c) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$

6. Resuelve el siguiente problema de valor inicial

$\frac{dy}{dx} = 4\sin(2x)\,;\, y(0) = 4.$

7. Encuentra el área de la región en el plano delimitado por las curvas y= $x(x-3)^2$ y $y = x$. (Ten cuidado, hay dos piezas en esta región).

8. Un cultivo de bacterias contiene 1000 bacterias 3 horas después de su inicio y 3000 bacterias 5 horas después de su inicio. Suponiendo un crecimiento exponencial, encuentre una fórmula para el número de bacterias presentes t horas después del inicio del cultivo y use esta fórmula para estimar el número inicial de bacterias presentes y el momento en que habrá 20,000 bacterias presentes.

Programación.

1. Dado un arreglo A con N enteros, y un entero positivo M, se proporciona un par (i, j) con 1 ≤ i ≤ j ≤ N. Se deberán obtener las parejas (r, s) donde i ≤ r ≤ s ≤ j, tal que la suma de los elementos de A en el rango [r,s] es múltiplo de M, es decir: [A(r)+A(r+1)+A(r+2)+…+A(s)] mod M = 0. Por ejemplo, para el arreglo de N=7 elementos A=[4, 2, 2, 1, 5, 3, 2], M=5, y el par (i, j) = (2, 5), se obtienen los pares (2,4), (2,5) y (5,5) cuyas sumas son 10, 15 y 5, múltiplos de 5.

2. En el Álgebra, comúnmente se utilizan signos de agrupación tales como paréntesis ( ), corchetes [ ], o llaves { }, los cuales se utilizan para indicar el orden en que se realizarán las operaciones aritméticas, por ejemplo: [a * (x +y) +c] – [d – (b+c)]. Sin embargo, existen ciertas formas inválidas de utilizar dichos signos de agrupación, por ejemplo: [a +b}, (a-(b+c), a * [x-y]], (a + {b-c)*d}. Los signos deben estar bien balanceados, es decir, por cada signo que “abre” una expresión debe haber uno correspondiente que la “cierre”, y deben estar anidados, es decir, un signo que “abre” le debe corresponder un siguiente signo

del mismo tipo que "cierre", a menos que sea otro signo que "abre". Describe un algoritmo (en pseudocódigo) que determine si una expresión algebraica tiene o no error en los signos de agrupación.

3. Dos amigos se intercambian mensajes alfabéticos codificados formando cadenas de números, puntos y guiones. Las letras del mensaje se codifican multiplicando su posición en el alfabeto por la posición dentro del mensaje (se considera un alfabeto de 27 letras contando la ñ). Cada valor de letra en el código está separado por un punto y cada palabra se separa con un guion. Describe los algoritmos (en pseudocódigo) para encriptar y desencriptar los mensajes que se intercambian entre ellos.

Por ejemplo, para el mensaje "hola mundo" se obtiene el mensaje codificado

8.32.36.4-78.154.112.36.160

4. Dado un número que representa el valor de un año, describe el algoritmo (en pseudocódigo) que determine si el año será bisiesto o no. La regla para determinar los años bisiestos es:

a) los años bisiestos son los divisibles entre 4;

b) excepto si es divisible entre 100, entonces no es bisiesto;

c) a menos que sea divisible entre 400, entonces sí es bisiesto.

Por ejemplo, 2000 sí es bisiesto; 2100 no es bisiesto; 2020 si es bisiesto; 2100 no es bisiesto.

5. Un arreglo A de números enteros tiene una longitud par N. Cada par de elementos de A representan las coordenadas (x,y) de un vértice en el perímetro de un polígono en un plano. Describe el algoritmo (en pseudocódigo) para calcular la longitud del lado más largo y del lado más corto, y el número de lados que tiene el polígono.

6. El popular juego Buscaminas consiste en seleccionar las casillas en una matriz de espacios en donde no se encuentren unas minas. Si se logran descubrir todas las casillas sin minas, y se quedan cubiertas solo las casillas con minas, el jugador gana. Cuando se descubre una casilla que no contiene una mina, se descubren todas aquellas casillas aledañas a ésta que no contienen minas, y las aledañas a éstas sin minas, de manera recursiva. Sin embargo, si alguna casilla que se descubre contiene una mina aledaña se muestra un número indicando cuántas casillas aledañas contienen minas. Cada casilla tiene a lo más 8 casillas aledañas. Por ejemplo, para un campo minado de 4 x 4 casillas, y dos minas ubicadas en las posiciones (1,1) y (3,2), se obtiene la siguiente matriz de números de adyacencia de minas (* indica la posición de la mina):

*	1	0	0
2	2	1	0
1	*	1	0
1	1	1	0

Describir el algoritmo (en pseudocódigo) para generar la matriz de números que indican la cantidad de minas adyacentes en cada casilla. La entrada del algoritmo serán las dimensiones del campo minado (M, N), la cantidad de minas P, y P pares (i,j) con (1,1) ≤ (i, j) ≤ (M, N) que indican las posiciones de cada mina en el campo. La salida del algoritmo será una matriz de tamaño (M,N) que contenga asterisco (*)

en las posiciones de las minas y números (entre 0 y 8) indicando la cantidad de minas aledañas a cada casilla que no contiene mina.

7. Se tiene una lista de N datos que representan las edades de los estudiantes de una escuela primaria. Las edades varían entre 5 años y 13 años. Escribe un algoritmo (en pseudocódigo) que obtenga la tabla de frecuencias de las edades, la media, la mediana y la moda a partir de los N datos.

8. La multiplicación de matrices es un componente fundamental de muchos algoritmos numéricos y no numéricos. El producto de una matriz A de orden n x m, y una matriz B, de orden m x p, es una matriz C de orden n x p, cuyos elementos están definidos por:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} * b_{k,j} \ para\ 1 \leq i \leq n \ \ y \ \ 1 \leq j \leq p$$

Describa un algoritmo (en pseudocódigo) que calcule el producto de dos matrices que sean compatibles, de no serlo, deberá avisar que el producto no es posible realizarlo.

9. Los N alumnos de un grupo de educación primaria tienen calificaciones (con valores entre 0 y 10) correspondientes a 8 asignaturas diferentes. Si algún estudiante no presentó algún examen, la calificación será cero. Escribir un algoritmo que calcule: (a) el promedio de calificación de cada estudiante, (b) el promedio general de cada asignatura, (c) el promedio general del grupo, (d) el porcentaje general de inasistencia a los exámenes (calificación cero), y (e) El número del estudiante con mejor promedio.

10. Decimos que una pila *p* es fondo de otra pila *q* si todos los elementos de *p* están en *q* en el mismo orden y en las posiciones más profundas a la cima. La pila nula (vacía) se considera fondo de cualquier otra pila. Por ejemplo, si A:=[7,9,4,2], B:=[5,7,3,6,7,9,4,2] y C:=[3,7,9,2,4], entonces A es fondo de la pila B, pero no de la pila C. Escribe un algoritmo para saber si una pila es fondo de otra. Utilice las operaciones propias de la pila (push y pop).

Referencias.

1. Spiegel, Murray R., Stephens, Larry J. "Estadística: Serie Schaum", McGraw-Hill Interamericana, 4ª edición, (2009).
2. Ross, S. M. "Probabilidad y Estadística para Ingenieros", 2a Edición. McGraw-Hill, (2002).
3. Montgomery, D.C. "Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería", Limusa. México (2015).
4. Grossman, Stanley I. "Algebra Lineal", McGraw Hill Higher Education, (2012).
5. Williams, G. "Álgebra lineal con aplicaciones", McGraw-Hill Interamericana, (2002).
6. Stewart, James. "Cálculo: Conceptos y Contextos: Una variable", Cengage Learning Editores, 4ª. Edición (2010).
7. Taylor, H.E.; Wade, T.L. "Cálculo Diferencial e Integral", Limusa, México, (2010).
8. Joyanes, L. "Fundamentos de programación algoritmos, estructuras de datos y objetos." Madrid. Mc Graw Hill (2008).
9. Cairo, O. Metodología de la Programación. México: Alfaomega (2013).

10. Sedgewick, R. Wayne, K. “Computer Science: An Interdisciplinary Approach”, Addison-Wesley Professional (2016)
11. Kernighan, B., Ritchie, D. “The C Programming Language”, China Machine Press; 2a ed. (2006).
12. Downey, A. “Think Python”, O’Reilly Media, 2a ed. (2015)