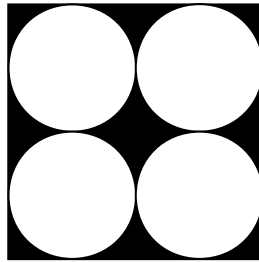


**XXIII Olimpiada Mexicana de Matemáticas**  
**Examen Departamental de Secundarias. Nivel Cadete.**  
**Yucatán, 2009**

**Problema 1:**

Para buscar el área sombreada, restamos el área de los cuatro círculos al área del cuadrado:

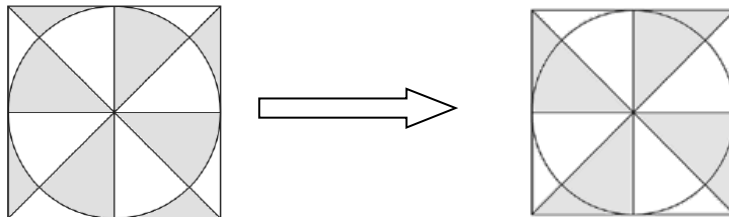


El área del cuadrado es  $4\text{cm}^2$ . El lado del cuadrado mide  $2\text{cm}$ , por tanto, el diámetro de cada círculo es  $1\text{cm}$  y su radio  $\frac{1}{2}\text{cm}$ . De este modo el área de un círculo es  $\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$ . Cuatro veces esta área es  $\pi$ , restada de  $4$  obtenemos  $4 - \pi \text{ cm}^2$ .

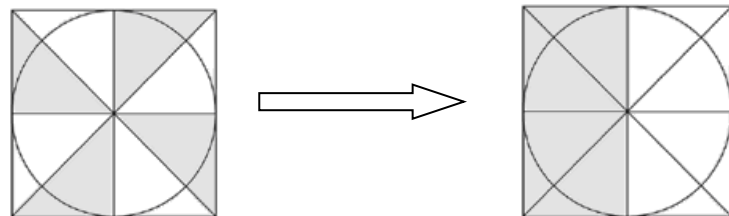
La respuesta es **c**).

**Problema 2:**

Una reordenación de las “piezas” hace más evidente el valor de esta área.



Esta figura se puede simplificar aún mas:



De este modo, es fácil darse cuenta que el area pedida es la mitad del área del cuadrado (el área del cuadrado es  $1$ ), es decir,  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ .

La respuesta es **e**).

**Problema 3:**

Una forma de hallar la solución es sumar paso a paso hasta llegar a 171.

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15 = 120$$

$$120+16 = 136$$

$$136+17 = 153$$

$$153+18 = 171$$

De forma que Jhonny tiene 18 años.

La respuesta es **d**).

**Problema 4:**

Notemos que en todas las opciones que se presentan como solución, los números son enteros mayores a  $100 = 10^2$ . Veamos que:

$103 = 100 + 3$  y 3 no es el cuadrado de algún número.

$107 = 100 + 7$  y 7 no es el cuadrado de algún número.

$109 = 100 + 9$  y 9 es el cuadrado de 3 ya que  $3^2 = 9$ .

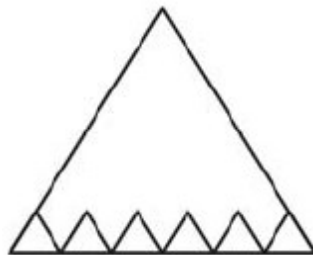
$127 = 100 + 27$  y 27 no es el cuadrado de algún número.

De lo anterior observamos que el número que se puede descomponer como suma de dos cuadrados es el 109 ya que  $10^2 + 3^2 = 109$ .

La respuesta es **c**).

**Problema 5:**

Observemos la figura:



Tenemos 6 triángulos pequeños iguales entre sí, cuyos perímetros suman 36. de modo que cada uno tiene un perímetro de 6. Por tanto, el lado de un triángulo pequeño mide 2. Entonces el lado del triángulo grande mide  $6 \times 2 = 12$ .

La respuesta es **d**).

### Problema 6:

Veamos que sucede con un número que termina en 7, por ejemplo el número 7,

7 termina en 7 (un siete)

$7 \times 7 = 49$  termina en 9 (dos sietes)

$7 \times 7 \times 7 = 243$  termina en 3 (tres sietes)

$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 1701$  termina en 1 (cuatro sietes)

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 11907$  termina en 7 (cinco sietes)

De lo anterior notamos dos cosas:

1.- Para detectar los valores del dígito de la unidades solo bastaría multiplicar el número 7 con el último dígito del número anterior. **Ejemplo:**  $7 \times 7 = 49$  para obtener el dígito 3 del siguiente número bastaría multiplicar 9 por 7 y el resultado (que es 63) tomarle el dígito de las unidades, esto nos evita calcular el número  $7 \times 7 \times 7$ .

2. - Que a partir del quinto siete se vuelve a repetir el patrón de las unidades 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, ... así sucesivamente

Con estas observaciones estamos listos para resolver el problema.

Como el número termina en siete basta tomar el último dígito de  $N$  (que es siete) y multiplicarlo con el último dígito de  $N$  (que también es siete). Así el dígito de  $N \times N$  es 9.

Este último dígito se multiplica por el último dígito de  $N$  (que es siete) para obtener el dígito de  $N \times N \times N$  que será 3, así sucesivamente. Los resultados serán los siguientes:

$N$  termina en 7

$N \times N$  termina en 9

$N \times N \times N$  termina en 3

$N \times N \times N \times N$  termina en 1

$N \times N \times N \times N \times N$  termina en 7

$N \times N \times N \times N \times N \times N$  termina en 9 y así sucesivamente...

Como son 20 veces que se debe hacer la multiplicación y siguiendo el patrón 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, .... El dígito será 1.

La respuesta es **a**).

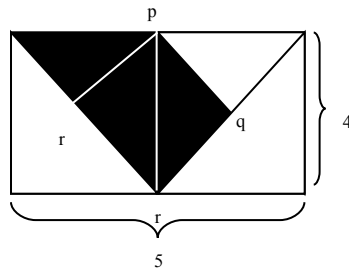
### Problema 7:

Al agrupar las vacas de 15 en 15 le sobran siete. Como 15 es un múltiplo de tres, lo que se podía agrupar de 15 en 15 se puede agrupar de tres en tres, de modo que solo resta acomodar las siete vacas para ver cuantas sobrarán, naturalmente, sobrarán 1. Notemos que 15 también es múltiplo de cinco, y lo que se pudo acomodar de 15 en 15 se puede acomodar de cinco en cinco, de modo que solo falta acomodar siete vacas y sobrarán dos esta vez. Tenemos que  $x$  es 1 e  $y$  es 2 por lo que  $x + y = 3$ .

La respuesta es **b**).

### Problema 8:

Veamos la siguiente figura:



El área del rectángulo es 20. Recordemos que el área de un triángulo es la mitad de la del rectángulo que lo contiene. Ahora bien, el área del triángulo blanco pequeño es la cuarta parte del área del triángulo grande (al unir los puntos medios de un triángulo divide a éste en cuatro triángulos de áreas iguales, como se aprecia en la figura). De esta forma el área sombreada es las  $3/4$  partes del área del triángulo grande, que es la mitad del área del rectángulo. Por lo tanto, la fracción de área que ocupa la región sombreada es :  $(3/4) \cdot (1/2) = 3/8$ . Multiplicando esto por el área total obtenemos el área de la región sombreada:  $(3/8) \cdot (20) = 15/2$ .

La respuesta es **e**).

### Problema 9:

Hay dos formas de resolver el problema, acomodando los nombres por las pistas para obtener quién gana menos. Y la segunda forma, por eliminación:

Tony gana más que Leandro, pero menos que Manuel, de modo que Manuel y Tony no son soluciones. Solo quedan Moisés, Leandro y José. Manuel gana más que Moisés y menos que José. De forma que José tampoco es solución. Sólo quedan Moisés y Leandro. Leandro gana más que Moisés... De esta manera Moisés es el que gana menos.

La respuesta es **b**).

### Problema 10:

Por supuesto la solución consiste en simplemente hallar los divisores de 1170. Estos se pueden hallar por enumeración: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 15, 18, 26, 30, 39, 45, 65, 78, 90, 117, 130, 195, 234, 390, 585, 1170. Como no es permisible una formación de  $1 \times 1170$  o  $1170 \times 1$ , sólo se consideran 22 casos, solo 22 formaciones son posibles. Otra forma de hallar los divisores de 1170 consiste en factorizar  $1170 = 117 \times 10 = 3^2 \times 13 \times 5 \times 2$ . De aquí notamos que para calcular el ancho de la formación basta con considerar un factor  $m$  de 1170, ya que el largo será justamente  $1170/m$ . Para ver cuantas  $m$ 's se pueden formar, notemos que esta  $m$  puede tener 2, 1 o ningún "3", 1 o ningún "13", 1 o ningún "5", 1 o ningún "2". De tal forma hay  $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$  formas de escoger la  $m$  y por tanto, igual número de formaciones.

La respuesta es **a**).

**Problema 11:**

Para ser de tres cifras el número no puede comenzar con cero. Ahora, contemos los números que comienzan con uno: el más bajo es 108, le sigue 117, 126:

108	}	Son 9	207	}	Son 8
117			216		
126			225		
135					
144					
153					
162					
171			270		
180					

De aquí resulta claro que los números que comienzan con 2 son 8, los que comienzan con 3 son siete y así sucesivamente hasta el último que es el 900 (si no te parece claro, puedes continuar la tabla). De modo que el total es  $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ .

La respuesta es **d**).

**Problema 12:**

Es de notar que hay cuatro casas por el número de colores, vehículos y mascotas. Es fácil hallar la casa del perro si elaboramos una tabla: Donde se bebe jugo hay patines, no hay gato ni perro y la casa no es ni amarilla ni azul. Donde se bebe soda hay una bicicleta, pero no tienen gato ni oveja. Donde se bebe vino hay un gato.

Casa	No azul ni amarilla			
Vehículo	Patines	Bicicleta		
Mascota	No gato ni perro	No gato ni oveja	Gato	
Bebida	Jugo	Soda	Vino	

Donde se hay auto la casa es roja, pero no tienen oveja y tampoco se bebe vino. Solo se puede poner el auto en la casa del gato o en donde no sabemos nada aún.

En la casa del gato no es posible por que se bebe vino, la tabla queda así:

Casa	No azul ni amarilla			Roja
Vehículo	Patines	Bicicleta		Auto
Mascota	No gato ni perro	No gato ni oveja	Gato	No gato
Bebida	Jugo	Soda	Vino	

Por eliminación, en la casa del gato está la motocicleta, además, la primera casa no puede ser azul, ni amarilla ni roja:

Casa	Rosa			Roja
Vehículo	Patines	Bicicleta	Motocicleta	Auto
Mascota	No gato ni perro	No gato ni oveja	Gato	No gato
Bebida	Jugo	Soda	Vino	

Donde hay un conejo la casa no es azul ni rosa  
Entonces en la casa rosa no hay gato, perro o conejo:

Casa	Rosa			Roja
Vehículo	Patines	Bicicleta	Motocicleta	Auto
Mascota	Oveja		Gato	
Bebida	Jugo	Soda	Vino	

Donde hay conejo la casa no es azul ni rosa y no hay auto.  
El conejo solo puede estar en la casa donde hay bicicleta.

Casa	Rosa			Roja
Vehículo	Patines	Bicicleta	Motocicleta	Auto
Mascota	Oveja	Conejo	Gato	
Bebida	Jugo	Soda	Vino	

El perro tiene que estar en la casa roja.

La respuesta es **a**).