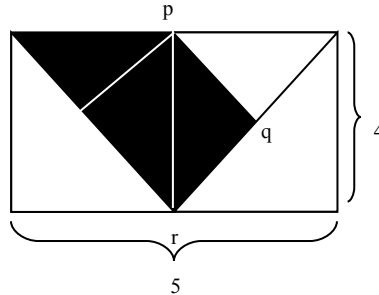


XXIII Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Examen Departamental de Secundarias. Nivel Cadete.
Yucatán, 2009

Problema 1:

Veamos la siguiente figura:



El área del rectángulo es 20. Recordemos que el área de un triángulo es la mitad de la del rectángulo que lo contiene. Ahora bien, el área del triángulo blanco pequeño es la cuarta parte del área del triángulo grande (al unir los puntos medios de un triángulo divide a éste en cuatro triángulos de áreas iguales, como se aprecia en la figura). De esta forma el área sombreada es las $3/4$ partes del área del triángulo grande, que es la mitad del área del rectángulo. Por lo tanto, la fracción de área que ocupa la región sombreada es : $(3/4) \cdot (1/2) = 3/8$. Multiplicando esto por el área total obtenemos el área de la región sombreada: $(3/8) \cdot (20) = 15/2$.

La respuesta es **e**).

Problema 2:

La escalera tiene 5 escalones y Alan está en el primero por lo que le faltan 4 por subir. Sólo puede saltarse dos escalones a lo más dos veces, por lo que quedan las opciones de hacerlo ninguna vez, una vez, o dos veces. Entre estas tenemos: $1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 2$, $1 + 2 + 1$, $2 + 1 + 1$, $2 + 2$. Son cinco formas de sumar 4, donde el uno representa saltar un escalón y el dos representa saltar dos.

La respuesta es **d**).

Problema 3:

El problema puede resolverse aplicando el Teorema de Pitágoras. En el triángulo CPB , dado que la hipotenusa mide 13 y un cateto mide 5, el valor del segundo cateto debe ser 12, ya que $12^2 + 5^2 = 13^2$. En el triángulo APC , conocemos los valores de los dos catetos, por lo que podemos calcular el valor de la hipotenusa. Dados los catetos 12 y 9, la hipotenusa debe valer 15. Ahora conocemos el valor de los tres lados del triángulo y podemos hallar su perímetro. $13 + 14 + 15 = 42$.

La respuesta es **b**).

Problema 4:

Hay dos formas de resolver el problema, acomodando los nombres por las pistas para obtener quién gana menos. Y la segunda forma, por eliminación:

Tony gana más que Leandro, pero menos que Manuel, de modo que Manuel y Tony no son soluciones. Solo quedan Moisés, Leandro y José. Manuel gana más que Moisés y menos que José. De forma que José tampoco es solución. Sólo quedan Moisés y Leandro. Leandro gana más que Moisés... De esta manera Moisés es el que gana menos.

La respuesta es **b**).

Problema 5:

Al sumar los números, decenas se suman con decenas, centenas con centenas, ..., de forma que solo la suma unidades con unidades afecta al dígito de las unidades del número $2009^2 + 2009^4 + 2009^6 + 2009^8 + 2009^{10}$ que nos piden, de modo que solo las unidades de $2009^2, 2009^4, 2009^6, 2009^8, 2009^{10}$ son relevantes para hallar el dígito de las unidades de $2009^2 + 2009^4 + 2009^6 + 2009^8 + 2009^{10}$. Un número que termina en 9 al cuadrado termina en 1, al cubo termina en 9, a la cuarta termina en 1, ..., (¿por qué?, trata de hallar el resultado de $2009^2 = 2009 \times 2009$ en el modo usual –a mano– verás que las unidades solo se suman con unidades así que sólo el producto unidad \times unidad es relevante para saber en qué cifra termina el producto) de modo que una potencia par de un número que termina en nueve, siempre terminará en uno. Es decir, $2009^2, 2009^4, 2009^6, 2009^8, 2009^{10}$, terminan todos en 1, de manera que su suma terminará en lo mismo que $1+1+1+1+1 = 5$.

La respuesta es **c**).

Problema 6:

Al agrupar las vacas de 15 en 15 le sobran siete.

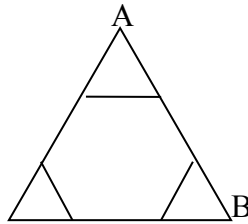
15 es un múltiplo de tres, y lo que se podía agrupar de 15 en 15 se puede agrupar de tres en tres, de modo que solo resta acomodar las siete vacas para ver cuantas sobrarán, naturalmente, sobrarán 1.

15 también es múltiplo de cinco, y lo que se pudo acomodar de 15 en 15 se puede acomodar de cinco en cinco, de modo que solo falta acomodar siete vacas y sobrarán dos esta vez. Tenemos que x es 1 e y es 2 por lo que $x+y = 3$.

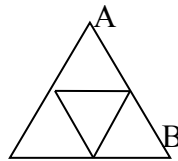
La respuesta es **b**).

Problema 7:

Dado que Puk no puede pasar por O , quitamos las aristas que tienen a O como vértice para obtener la figura:



La cual es equivalente a:



y por tanto hay 8 caminos.

La respuesta es **d**).

Problema 8:

Por supuesto la solución consiste en simplemente hallar los divisores de 1170. Estos se pueden hallar por enumeración: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 15, 18, 26, 30, 39, 45, 65, 78, 90, 117, 130, 195, 234, 390, 585, 1170. Como no es permisible una formación de 1×1170 o 1170×1 , sólo se consideran 22 casos, solo 22 formaciones son posibles. Otra forma de hallar los divisores de 1170 consiste en factorizar $1170 = 117 \times 10 = 3^2 \times 13 \times 5 \times 2$. De aquí notamos que para calcular el ancho de la formación basta con considerar un factor m de 1170, ya que el largo será justamente $1170/m$. Para ver cuantas m 's se pueden formar, notemos que esta m puede tener 2, 1 o ningún "3", 1 o ningún "13", 1 o ningún "5", 1 o ningún "2". De tal forma hay $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ formas de escoger la m y por tanto, igual número de formaciones.

La respuesta es **a**).

Problema 9:

Procedamos por eliminación, veamos cuáles cantidades sí pueden formarse usando las monedas de drinilandia:

\$5*2		\$5*3	\$5*1
\$8*2	\$8*5		\$8*3
\$13*2	\$13*1	\$13*3	\$13*2
\$52	\$53	\$54	\$55

Está claro que las opciones b), c), d) y e) sí pueden formarse usando seis monedas de drinilandia.

La respuesta es **a**).

Problema 10:

Imaginemos un prisma rectangular, si duplicamos su largo, el original cabrá dos veces en el nuevo, si triplicamos su ancho cabrá seis veces:



Y finalmente, si le triplicamos su altura cabrá ahora 18 veces en el nuevo sólido.

La respuesta es e).

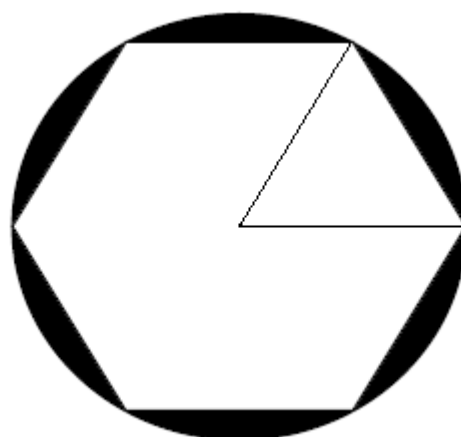
Problema 11:

El producto $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2007}\right)\left(1 + \frac{1}{2008}\right)$ puede verse de esta forma:
 $\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\dots\left(\frac{2007}{2006}\right)\left(\frac{2006}{2007}\right)\left(\frac{2009}{2008}\right) = \frac{2009}{2008}$

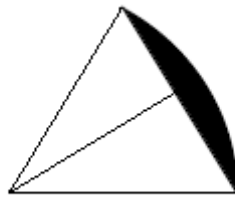
La respuesta es e).

Problema 12:

El área sombreada resulta de restar al área del círculo, el área del hexágono. El área del círculo podemos hallarla con rapidez: $\pi \text{ cm}^2$.



Las dos líneas de la figura son radios del círculo y son iguales, el ángulo entre ellas es 60° , por lo tanto, el triángulo mostrado es equilátero.



Concentrándonos sólo en el triángulo, tratemos de hallar su altura, que es la apotema del hexágono.

Conocemos uno de los catetos ($1/2$ cm) y la hipotenusa (1 cm), de modo que podemos hallar el cateto faltante con ayuda del teorema de Pitágoras. Este cateto es la altura y mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$. El perímetro del hexágono es 6, de modo que podemos hallar su área:

$$(\text{Área}) = \frac{(\text{Perímetro})(\text{Apotema})}{2} = \frac{(6)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}. \text{ Reducido todo esto, nos da } \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2.$$

Restado del área del círculo tenemos $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.

La respuesta es **c**).