**XXIII Olimpiada Mexicana de Matemáticas**
**Examen Zonal de Secundarias, Nivel Cadete.**
**Yucatán 2008.**
**Soluciones.**

**Problema 1.**

Supongamos que el lado del cuadrado grande es de 4 centímetros. Entonces existen 8 cuadrados de 1cm de lado, 5 cuadrados de 2cm de lado (3 en la parte superior y 2 en la parte inferior) y 1 de 4cm de lado. Así hay $8 + 5 + 1 = 14$ cuadrados en total.

La respuesta es **c)**.

**Problema 2.**

El peso del tercer cochinito es el doble del peso de Babe, es decir, *peso 3er cochinito* = 2(*peso Babe*); el peso del segundo cochinito es el doble del peso del tercer cochinito, es decir, *peso 2do cochinito* = 2(*peso 3er cochinito*) y por lo que vimos antes *peso 2do cochinito* = 4(*peso Babe*); el peso del primer cochinito es el doble del peso del segundo cochinito, es decir, *peso 1er cochinito* = 2(*peso 2do cochinito*) y por lo que vimos antes *peso 1er cochinito* = 8(*peso Babe*). Como el peso de los cuatro cochinitos es de 120, entonces

$$(\textit{peso Babe}) + (\textit{peso 3er cochinito}) + (\textit{peso 2do cochinito}) + (\textit{peso 1er cochinito}) = 120$$
$$(\textit{peso Babe}) + 8(\textit{peso Babe}) + 4(\textit{peso Babe}) + 2(\textit{peso Babe}) = 120.$$

Por tanto 15 veces el peso de Babe es igual 120. Así el peso de Babe es de 8kg.

La respuesta es **a).**

**Problema 3.**

En general, cada superhéroe por cada determinado número de días que tiene que estar en competencia son los mismos días que tiene que descansar, pero cuando llegue al final ya no tendrá que descansar dentro de la competencia, así

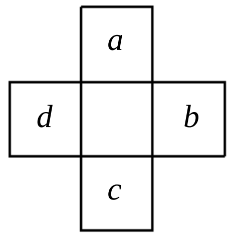
Flach tardaría $36-1 = 35$ días
Vatman tardaría $36-2 = 34$ días
Zuperman tardaría $36-3 = 33$ días,

Así Zuperman llegaría primero.

La respuesta es **b)**.

**Problema 4.**

Llamemos *a, b, c, d* al resto de los números de la cruz como indica la siguiente figura:




Como la suma de los números en la horizontal debe ser igual a la suma de los números en la vertical debe cumplirse que

$$a+c+x=d+b+x$$

Y entonces debe cumplirse que

$$a+c=d+b$$

Notemos que si x fuera 4 entonces se necesitaría que la suma de dos de los números 1,7,10,13 fuera igual a la suma de los restantes dos. Lo cual no es posible dado que las sumas de dos cualesquiera de esos números son:

$$1 + 7 = 8 \neq 23 = 10 + 13$$
$$1 + 10 = 11 \neq 20 = 7 + 13$$
$$1 + 13 = 14 \neq 7 + 10 = 17$$

Por otro lado cualquiera de las opciones 1,7, 13 es un valor de x con el cual la cruz puede ser llenada, como el amable lector puede verificar.

La respuesta es **b).**

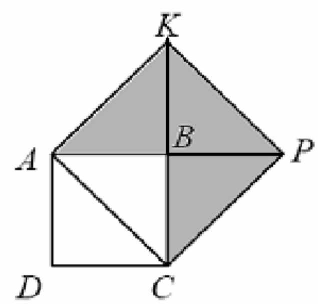
**Problema 5.**

Llamemos $\boldsymbol{x}$ al costo del boleto. Notemos que $\boldsymbol{x} < 8$ ya que si $\boldsymbol{x} = 8$ entonces el monto de los boletos pagados por las niñas sería 21 x 8 = 168, lo cual no es posible ya que se pago $160 en total. Entonces $\boldsymbol{x}$ es un número entre 5 y 7. Además notemos que el monto total, $160, debe ser un múltiplo de $\boldsymbol{x}$, el costo de cada boleto. De los números 5, 6, 7 sólo el 5 divide a $160, por lo que $\boldsymbol{x} = 5$. De esta manera el número de personas que asistieron es igual al monto total pagado entre el costo de cada boleto, es decir $160 \div 5 = 32$. Como 21 asistentes son niñas, el resto, 32-21 = 11 son niños.

La respuesta es **a)**.

**Problema 6.**

Si dividimos el cuadrado *AKPC* en cuatro regiones como en la siguiente figura.




Podemos notar que el área de cada una de estas regiones es igual al área del triángulo *ABC*. Por lo tanto el área sombreada es igual a tres veces el área del triángulo *ABC*, el cual tiene por área la mitad del área del cuadrado *ABCD* cuya área es 1cm$^2$. Por tanto el área del triángulo *ABC* es $\frac{1}{2}\text{cm}^2$, así el área de la región sombreada es $\frac{3}{2}\text{cm}^2$.

La respuesta es **d)**.

**Problema 7.**

El entrenador baña a un elefante en 40 minutos. Entonces en un minuto limpia $\frac{1}{40}$ de un elefante. Su hijo baña a un elefante en dos horas, es decir, en 120 minutos entonces en un minuto limpia $\frac{1}{120}$ de un elefante. Entonces trabajando juntos podrán limpiar $\frac{1}{40}+\frac{1}{120}=\frac{1}{30}$ de un elefante. Por lo tanto tardarán 30 minutos en bañar a un elefante, entonces tardarán 90 minutos en bañar a 3, lo que es lo mismo, tardarán una hora y media.

La respuesta es **e)**.

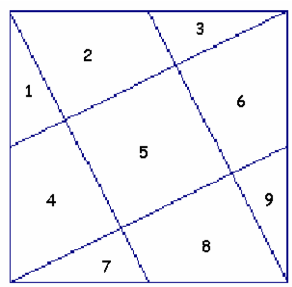
**Problema 8.**

Notemos que el último botón en ser pulsado no está marcado con el 4, pues nos dicen que los números no representan el orden, también nos dicen que no está marcado con 2 ni con 3. Por lo tanto el último botón que debe ser pulsado es el marcado con 1. Como el primer botón en ser pulsado debe estar separado del último, entonces este necesariamente es el marcado con 2. Ahora notemos que solo nos quedan el botón marcado con 4 y el botón marcado con 3. Como los números no representan el orden, el tercer botón en ser pulsado es el marcado con 4. Y entonces el segundo botón que se debe pulsar es el marcado con 3.

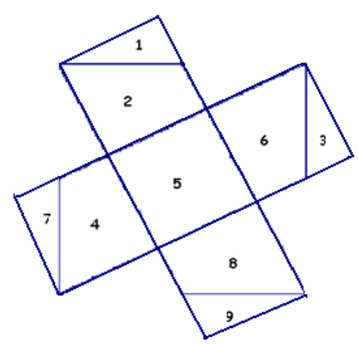
La respuesta es **c)**.

**Problema 9.**

Notemos que el cuadrado grande está formado por 9 regiones como se indica en la siguiente figura.




Entonces el área del cuadrado grande es igual a la suma de las áreas de las 9 figuras. Queremos hallar el área de la figura 5. Ahora veamos que podemos acomodar las 9 figuras de la siguiente forma:




La "cruz" de la figura anterior tiene la misma área que el cuadrado original, ya que está formado por las mismas 9 figuras. Entonces su área es de $20cm^2$. Por otro lado la cruz está formada por 5 cuadritos idénticos al cuadrito marcado con 5. Por lo tanto el área de éste es un quinto del área total es decir $20 \div 5 = 4cm^2$.

La respuesta es **d)**.

**Problema 10.**

Veamos que residuo dejan las potencias de 10 cuando se les divide entre 15. Si dividimos 100 entre 15 obtenemos como cociente 6 y como residuo 10. Si dividimos 1000 entre 15 obtenemos como cociente 66 y como residuo 10. Si dividimos 10000 entre 15 obtenemos como cociente 666 y como residuo 10. Por lo que si dividimos $10^{2008}$ entre 15 obtendremos como cociente $\underbrace{66\ldots66}_{2007}$ y como residuo 10.

La respuesta es **e)**.

**Problema 11.**

Llamemos $n$ al número de hombres en la tropa. Digamos que el primer cuadrado que hizo el coronel Efrén con sus hombres era de $x$ hombres de lado. Como le sobraron 36 hombres sin acomodar tenemos que:

$$n - 36 = x^2$$

Por otro lado sabemos que para disponer a los hombres con $x + 1$ soldados de lado, harían falta 75 hombres. Entonces tememos que:

$$n + 75 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Si a la segunda ecuación le restamos la primera obtenemos:

$$75 + 36 = 2x + 1$$
$$111 = 2x + 1$$
$$55 = x$$

Entonces por la primera ecuación tenemos que:

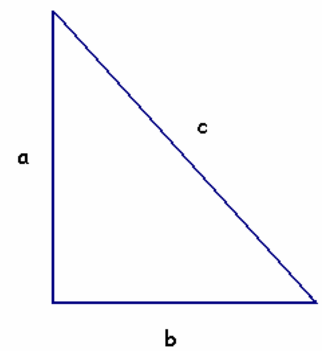
$$n = 36 + x^2 = 36 + 3025 = 3061$$

Entonces hay 3061 soldados en la tropa del coronel.

La respuesta es **a)**.

**Problema 12.**

Llamemos *a*, *b* a los catetos del triángulo y *c* a la hipotenusa.




Dado que el perímetro es 12 tenemos que

$$a + b + c = 12$$

En el problema nos dicen que $c = 5$, por lo tanto sabemos que:

$$a + b = 7$$

Entonces elevando ambos lados al cuadrado tenemos que:

$$(a + b)^2 = 49$$
$$a^2 + b^2 + 2ab = 49 \qquad \text{(I)}$$

Ahora bien, en virtud del teorema de Pitágoras sabemos que:

$$b^2 + a^2 = c^2 = 25$$

Sustituyendo esta igualdad en (I) tenemos que:

$$25 + 2ab = 49$$
$$2ab = 24$$
$$ab = 12 \qquad \text{(II)}$$

Ahora notemos que el área del triángulo es igual a base por altura sobre 2. En este caso el área es $\frac{ab}{2}$, que por la igualdad (II), es igual a 6.

La respuesta es **b)**.