XXIII OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Examen Pre-selectivo Interno de Secundarias
Nivel Cadete

SOLUCIONES

Problema 1. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$20-18+17-15+14-12+\cdots+5-3+2$

Solución: Notemos que en la expresión $20-18+17-15+14-12+\cdots+5-3+2$ hay 13 sumandos. Agrupemos por parejas los primeros 12 y dejamos sin agrupar al "2" de la siguiente manera:

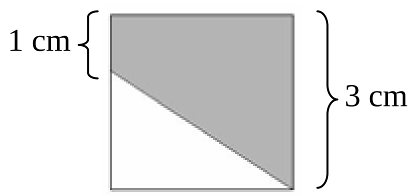
$$(20-18)+(17-15)+(14-12)+\cdots+(5-3)+2$$

Entonces tenemos una expresión con 7 sumandos, y podemos notar que cada uno de ellos es igual a 2. Por lo tanto tenemos que

$$20-18+17-15+14-12+\cdots+5-3+2=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{7}=7\cdot 2=14$$

La respuesta es **(c)**.

Problema 2. El siguiente cuadrado tiene 3 cm de lado, ¿cuál es el área de la parte sombreada?



Solución: El área del cuadrado es 9cm^2 y el área del triángulo blanco es $\frac{3*(3-1)}{2}=3$cm^2. Notemos que el área sombreada es igual al área del cuadrado menos el área del triángulo blanco, es decir, 6cm^2.

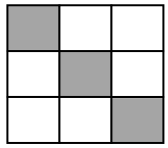
La respuesta es **(d)**.

Problema 3. En un grupo de 30 alumnos todos practican un deporte, basquetbol o futbol, de los cuales, 20 juegan futbol y 15 basquetbol, ¿cuál es la cantidad de alumnos que juegan ambos deportes?

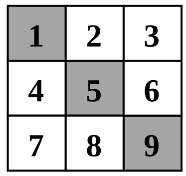
Solución: Si sumamos todos los alumnos que juegan fútbol (20) con todos los alumnos que juegan basquetbol (15) obtenemos 35. Sin embargo, estamos sumando dos veces a los alumnos que juegan ambos deportes; como en total hay 30 alumnos y nuestra suma excedió este número por 5 alumnos, tenemos que estos 5 son los que juegan ambos deportes.

La respuesta es **(c)**.

Problema 4. En la siguiente cuadrícula, un movimiento consiste en tomar dos cuadritos que tienen un lado en común y cambiarlos de color, es decir, si un cuadrito es gris se cambia a blanco y si es blanco se cambia a gris. ¿Cuál es el mínimo número de movimientos que hay que hacer para que la cuadrícula completa quede de color gris?

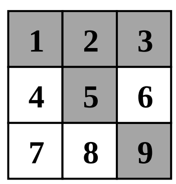


Solución: Numeremos la cuadrícula como sigue:

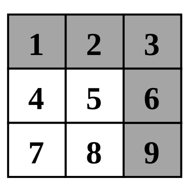


Como hay 6 cuadritos blancos y en cada movimiento cambiamos el color de dos cuadritos, necesitaríamos al menos tres movimientos para que los 6 cuadritos cambien de color. De modo que no podemos volver gris toda la cuadrícula con 1 o 2 movimientos. Tampoco podemos hacerlo con tres, ya que en cada movimiento sólo podemos modificar el color de cuadritos adyacentes y los 6 cuadritos blancos no se pueden ordenar en tres parejas de cuadritos adyacentes. De todo lo anterior concluimos que se necesitan cuatro movimientos o más. Vamos a proporcionar la secuencia de 4 movimientos a realizar para que la cuadrícula quede coloreada con el color gris:

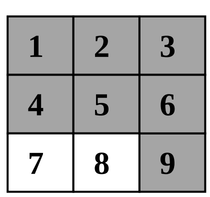
Primer movimiento: Escogemos los cuadritos 2 y 3:



Segundo movimiento: Escogemos los cuadritos 5 y 6:



Tercer movimiento: Escogemos los cuadritos 4 y 5:



Cuarto movimiento: Escogemos los cuadritos 7 y 8, y así la cuadrícula se vuelve gris.

La respuesta es **(b)**.

Problema 5. ¿Cuántos ceros tiene al final el número $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times \cdots \times 12$?

Solución: Notemos que el número tiene un cero al final por cada factor 10 que aparece, es decir, por cada par de factores 2 y 5 que se multiplican. En todos los números sólo hay dos factores 5 (el del 5 y del 10) y aunque hay muchos factores 2 sólo se pueden formar dos parejas de 2 y 5. Por lo tanto termina en dos ceros.

La respuesta es **(b)**.

Problema 6. En el país monedalandia, solo hay monedas de $3 y $5, ¿de cuántas maneras se pueden juntar $30, sin importar el orden en que se den las monedas?

Solución: Tenemos monedas de $3 y de $5 y queremos juntar con ellas una cantidad de $30. Es decir, queremos que la suma de los valores de las monedas sea 30. Una manera es usar 6 monedas de $5:

5 5 5 5 5 5 = $30

Si se usan 5 monedas de $5 se tendría $25, y faltarían $5 (para el total de $30), que se tiene que juntar con monedas de $3, lo cual es imposible (5 no es múltiplo de 3).

5 5 5 5 5 ? = $30

Similarmente, Si se usan 4 monedas de $5 se tendría $20, y faltarían $10 que se tiene que juntar con monedas de $3, lo cual es imposible ya que 10 no es múltiplo de 3.
Si se usan 3 monedas de $5 se tendría $15, y faltarían $15 que se tiene que juntar con monedas de $3, lo cual sí es posible, usando 5 monedas de $3.

5 5 5
3 3 3 3 3 = $30

Si se usan 2 monedas de $5 faltarían $20 que se tiene que juntar con monedas de $3, lo cual es imposible (20 no es múltiplo de 3). De igual modo, Si se usa 1 moneda de $5 faltarían $25) que se tiene que juntar con monedas de $3, lo cual es imposible (10 no es múltiplo de 3).

Finalmente, si no se usan monedas de \$5, sí se pueden juntar \$30 con puras monedas de \$3\$ (usando 10 de ellas). Por tanto para pagar \$30 con monedas de \$3 y \$5, se tienen 3 formas a saber:

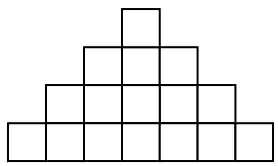
\$5+\$5+\$5+\$5+\$5+\$5,

\$5+\$5+\$5+\$3+\$3+\$3+\$3+\$3 y

\$3+\$3+\$3+\$3+\$3+\$3+\$3+\$3+\$3+\$3.

La respuesta es **(a)**.

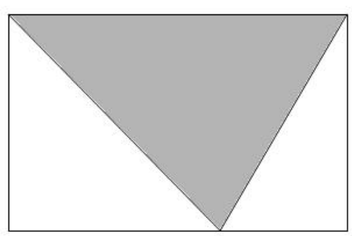
Problema 7. En la siguiente figura, ¿cuántos cuadrados aparecen?



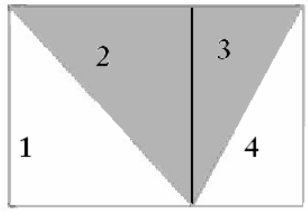
Solución: Contemos cuántos cuadrados de cada tamaño hay. Podemos ver que hay 16 cuadrados de lado 1, 6 cuadrados de lado 2 y un cuadrado de lado 3. En total hay 23 cuadrados.

La respuesta es **(e)**.

Problema 8. El área del rectángulo es 2008 cm^2, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



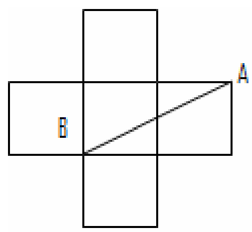
Solución: Dividamos el rectángulo en cuatro regiones de la siguiente manera:



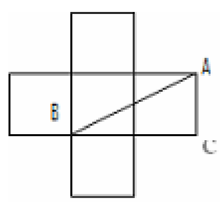
Notemos que el área de la región 1 es igual al área de la región 2. Y el área de la región 3 es igual al área de la región 4. Por lo que el área sombreada es igual al área blanca, de tal manera que el área sombreada es la mitad del área del rectángulo, es decir, 1004 cm^2.

La respuesta es **(a)**.

Problema 9. Si la longitud del segmento AB es de 6 cm y los cinco cuadritos de la cruz son iguales, ¿cuánto vale el área de la cruz?



Solución: Llamemos l al lado de cada cuadrito y C al vértice que indica la siguiente figura:



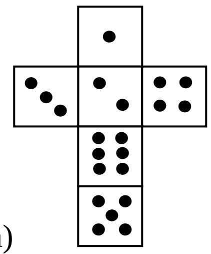
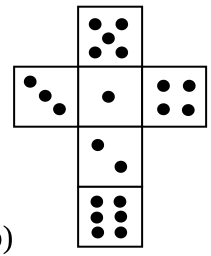
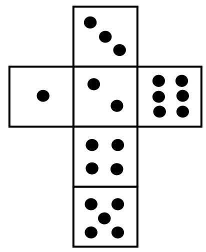
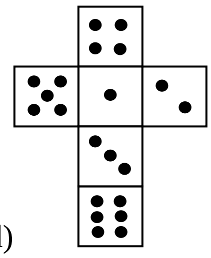
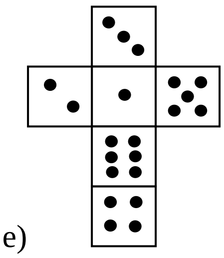
Entonces por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC tenemos que

$$(2l)^2 + l^2 = AB^2 = 6^2 = 36.$$

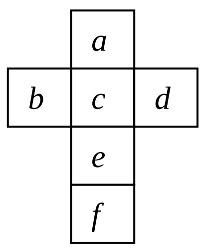
Por tanto, $4l^2 + l^2 = 36.$ Entonces $5l^2 = 36.$ Por otro lado el área de cada cuadrito es l^2. Y como la cruz está formada por 5 cuadritos, su área total es de $5l^2$. En consecuencia su área es de 36 cm^2.

La respuesta es **(d)**.

Problema 10. Un dado común, es aquél en el que la suma de los puntos pintados en caras opuestas es 7. ¿Con cuál de las siguientes figuras es imposible formar un dado común, si solo se permite hacer dobleces?

a)  b)  c)  d)  e) 

Solución: Llamemos *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f* la cara que indica la siguiente figura



Es fácil ver que al doblar el dado las caras opuestas serán:

- La cara marcada con *a* es opuesta a la cara marcada con *e*.
- La cara marcada con *c* es opuesta a la cara marcada con *f*.
- La cara marcada con *b* es opuesta a la cara marcada con *d*.

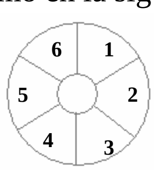
Y por lo tanto,

$$a + e = c + f = b + d = 7$$

De los dados en las opciones, el único que no lo cumple es el que corresponde a la opción (e) ya que en él se tiene $a + e = 3 + 6 = 9$.

La respuesta es **(e)**.

Problema 11. Julius va al centro comercial de Circolandia, el cual tiene 6 tiendas distribuidas como en la siguiente figura:



Julius visita primero la tienda marcada con el número 1, luego la tienda marcada con el número 2, luego la tienda marcada con el número 3 y de manera similar sigue visitando las tiendas en sentido horario. Al finalizar la tarde Julius había hecho en total 2008 visitas. ¿Cuál fue la última tienda que visto Julius?

Solución: Notemos que Julio termina en la última tienda cada seis visitas. Si dividimos 2008 entre seis el cociente nos da 134 y el residuo 4. Es decir, $2008 = (134 \times 6) + 4$. Entonces dado que cada vez que hace seis visitas termina en la tienda 6, al realizar (134×6) visitas terminará en la tienda 6. Y al realizar las 4 visitas restantes alcanzará la tienda 4.

La respuesta es **(c)**.

Problema 12. Cris, Julio y Tony participan en un maratón. Se sabe que Julio salió en último lugar, justo después de Tony. Durante el recorrido las posiciones entre el primer, segundo y tercer lugar se fueron cambiando. Se sabe que Cris hizo 9 cambios de posición durante toda la carrera. Si Tony llegó a la meta antes que Julio, ¿cuál fue el orden de llegada a la meta?

Solución: Dado que Julio inició en último lugar justo después de Tony, deducimos que Tony inició en segundo lugar y Cris inició en primer lugar. Veamos en que lugar pudo haber terminado la carrera Cris.
Si Cris hubiera terminado la carrera en primer lugar, dado que inició en primer lugar esto quiere decir que el número de cambios en que Cris bajó de posición es igual al número de cambios en los que Cris subió su posición, ya que terminó en el mismo lugar en el que comenzó. Entonces el número de cambios que Cris realizó debería ser un número par, pues es igual a dos veces el número de cambios en los que Cris bajó de posición. Esto no es posible pues Cris tuvo 9 cambios de posición y 9 es un número impar.
Si Cris hubiera terminado la carrera en tercer lugar, entonces el número de cambios en los que Cris bajó de posición es dos unidades mayor al número de cambios en los que Cris subió de posición, ya que al final Cris terminó dos lugares abajo del lugar donde inició. Por lo tanto si k es el número de cambios en los que Cris subió de posición tenemos que el número total de cambios que tuvo Cris es $(k + 2) + k = 2(k + 1)$. De donde vemos que el número de cambios que Cris hubiera tenido es un número par. Esto no es posible porque Cris tuvo 9 cambios de posición y 9 es un número impar.
Por lo tanto, Cris necesariamente terminó en la segunda posición. Finalmente sabemos que Tony le ganó a Julio, por lo que las posiciones fueron primer lugar para Tony, segundo para Cris, y tercero para Julio.

La respuesta es **(d)**.