Problemas típicos de cálculo sobre:
continuidad, derivación e integración en una y varias variables

4 de marzo de 2018

1. Funciones de una variable

1.1. Continuidad

Problema 1. Calcular el $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Problema 2. Encontrar la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ y determinar los valores de x donde $h(x)$ es continua para las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{para todo} \quad x,$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{para } x < 0; \\ x^2 & \text{para } x \geq 0. \end{cases}$$

Problema 3. Demostrar que para cualquier función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para cada $x \in [0,1]$ existe por lo menos un punto c en $[0,1]$ para el cual $f(c) = c$.

1.2. Derivación

Problema 1. Si $x \neq 1$ se cumple la fórmula

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Determinar, por derivación, una fórmula para las siguientes sumas:

$$(a) \quad 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1},$$

$$(b) \quad 1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \cdots + n^2 x^n.$$

Problema 2. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Demostrar que entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, el de área mínima tiene lados de longitud $\frac{1}{2}L\sqrt{2}$.

Problema 3. Sea f un polinomio. Se dice que un número real α es una raíz de f de multiplicidad m si $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$, donde $g(\alpha) \neq 0$. Si f tiene r raíces en el intervalo $[a,b]$, demostrar que la derivada de f tiene por lo menos $r-1$ raíces.

1.3. Integración

Problema 1. Calcular la integral

$$\int_1^2 x^{-2} sen\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Problema 2. Sea $I = \int_0^1 e^t/(t+1)\ dt$.
Expresar la siguiente integral en función de I:

$$\int_0^1 e^t \ \ln(1+t)\ dt.$$

Problema 3. Calcular $f(2)$ si f es continua y cumple que, para toda $x \geq 0$,

$$\int_0^{x^2} f(t)\ dt = x^2(1+x).$$

2. Funciones de varias variables

2.1. Continuidad y Derivación

Problema 1. Para $(x,y) \neq (0,0)$, sea $f(x,y) = (x^2-y^2)/(x^2+y^2)$.
Encontrar el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende al origen $(0,0)$ a través de la línea recta $y = mx$.

Problema 2. Verificar que las derivadas parciales mixtas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ son iguales para la siguiente función:

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2).$$

Problema 3. Los cambios de variable

$$u = (x-y)/2, \qquad v = (x+y)/2$$

transforman $f(u,v)$ en $F(x,y)$. Usar la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}$$

en términos de las derivadas parciales $\partial f/\partial u$ y $\partial f/\partial v$.

Problema 4. Calcular las derivadas parciales de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{para } (x,y) \neq (0,0); \\ \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

en el origen $(0,0)$ y demostrar que f no es continua en $(0,0)$.

Problema 5. Localizar y determinar la naturaleza de todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$$

Problema 6. Demuestra que si existen todas las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ de $f(x_1,\dots,x_n)$ y están acotadas, entonces f es continua.

2.2. Integración

Problema 1. Para $a > 0$ calcular la integral doble

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\ dx\ dy$$

Problema 2. Sea R una región del espacio $\mathbb{R}^3$ con volumen V. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación definida por

$$T(x,y,z) = (ax, by, cz),$$

¿cuál es el volumen de la región transformada $T(R)$?

Problema 3. Sea $R = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ y sea $f : R \to \mathbb{R}$ continua. Si $F : R \to \mathbb{R}$ se define por

$$F(x_1,\dots,x_n) = \int_R f(x_1,\dots,x_n)\ dx_1 \cdots dx_n,$$

encontrar la derivada parcial $\partial F/\partial x_i$ en cualquier punto del interior de R.

Referencias

[1] Tom M. Apostol. Calculus I. *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal.* Reverté Ediciones, México.

[2] Tom M. Apostol. Calculus II. *Cálculo con funciones de varias variables y Álgebra Lineal, con aplicaciones para ecuaciones diferenciales y probabilidad.* Reverté Ediciones, México.

[3] J. E. Marsden, A. J. Tromba. Cálculo Vectorial. Addison Wesley, México.