

# Cálculo

## Examen de conocimientos 2018

Nombre: \_\_\_\_\_

11 de Junio, 2018

**Problema 1.** Sea  $f(x) = x^k$ , donde  $k \in \mathbb{N}$ . Desarrollar  $(x + h)^k$  usando el teorema del binomio y deducir la fórmula

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} x^{k-2} h + \dots + k x h^{k-2} + h^{k-1}. \quad (1)$$

Expresar el lado derecho de (1) usando notación sumatoria y demostrar que la derivada de  $f(x)$  es igual a  $kx^{k-1}$  usando la definición de la derivada como cierto límite.

**Problema 2.** Dados  $n$  números reales  $a_1, \dots, a_n$ , demostrar que la suma  $\sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$  es mínima cuando  $x$  es la media aritmética de  $a_1, \dots, a_n$ .

**Problema 3.** Calcular  $f(2)$  si  $f$  es continua y cumple que, para toda  $x \geq 0$ ,

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = x.$$

**Problema 4.** Encontrar el determinante Jacobiano de la transformación  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por las ecuaciones

$$x = u + v, \quad y = v - u^2.$$

Describir el subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^2$  que es la imagen bajo  $F$  del triángulo con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ . Luego calcular el área de  $S$  mediante una integral doble sobre  $S$ .