Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas

Aplicación de las Bases de Gröebner a la construcción de un controlador con una Inmersión Lineal Generalizada.

Tesis que presenta

L.M. Dennis Rafael Tuyub Puc

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Directores de Tesis

Dr. Javier Arturo Díaz Vargas

M. C. Celia Beatriz Villanueva Novelo

Mérida,Yucatán Julio 2009

Agradecimientos:

A Dios por las bendiciones y oportunidades que siempre me ha dado.

Al CONACyT por la confianza que ha depositado en los estudiantes y su apoyo económico.

A mis padres Rafael y Alicia que me han dado su confianza y ayuda.

A mis compaeros de maestría: Iván, Luís, Efraín, Javier, Ángel por su amistad, paciencia y ayuda.

A mis asesores Javier Díaz y Celia Villanueva por su dirección y paciencia.

Índice general

I Control **v**

1. Introducción **1**

2. El problema de Regulación de la Salida. **5**
2.1. Sistemas Lineales. 6
2.2. Sistemas No Lineales. 10
2.3. Regulación de la Salida con Retroalimentación del Error. . . . 15
2.4. Estabilidad Estructural y Regulación Robusta No Lineal . . . 19

3. Construcción de una Inmersión. **23**
3.1. Inmersión para un Control Polinomial 25
3.2. Inmersión Lineal con Coeficientes Variables. 27
3.2.1. Inmersión Lineal Generalizada 29

II Álgebra **31**

4. Antecedentes de Álgebra. **33**
4.1. Notación y definiciones básicas. 33
4.2. Ideales. 36
4.3. Anillos locales y localización. 39
4.4. Anillos asociados a órdenes monomiales. 40
4.5. Formas Normales y Bases Estándar. 42

5. Teoría de Módulos **49**
5.1. Módulos, submódulos y homomorfismos. 49
5.2. Bases Estándar para Módulos. 54
5.3. Sicigias 60

5.4. Operaciones Con Módulos. 63
5.4.1. El problema de la Membresia a un módulo. 64

6. Construcción del controlador. 65
6.1. Construcción de la Inmersión Lineal Generalizada. 68
6.2. Construcción del controlador. 73

7. Conclusiones y Problemas Abiertos. 77

A. Producto de Kronecker. 79
A.1. Polinomios (otra vista). 81

B. Breve introducción a Singular 85
B.1. Inicio 85
B.2. Ingresando Objetos. 87
B.3. Algunos Cálculos con Polinomios. 88

Parte I

Control

Capítulo 1

Introducción

El objetivo del presente trabajo es la construcción de una Inmersión Lineal Generalizada que nos proporcione una ley de control para resuelver el problema de Regulación de la Salida vía Retroalimentación del error. Esta inmersión generalizada se construirá usando una herramienta algebraica: Las Bases de Gröebner y el Módulo de Sicigias. Para ello haremos un repaso, primero del material necesario para la construcción de la inmersión, luego para la construcción de la Base de Gröebner y de las Sicigias. Finalmente mostramos como usar esta herramienta algebraica para construir la inmersión.

El objeto de estudio en teoría de control son los sistemas. Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un propósito determinado. La palabra sistema debe interpretarse en un sentido amplio que comprenda sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.

Ya que la teoría de control se encarga de las propiedades estructurales, requiere que las representaciones de los sistemas sean libres de detalles hasta que la propiedad principal que permanece es la conectividad. Claramente, un sistema es un concepto muy general; la teoría de control está más interesada en ciertas clases de sistemas, como son los sistemas dinámicos que son aquellos sistemas cuyo comportamiento sobre un periodo de tiempo es de interés. Por ejemplo, los relacionados con el crecimiento de la población. En cierto sentido casi todos estamos interesados en la teoría de control ya que queremos lograr objetivos bien definidos en cierto plazo de tiempo.

El control debe de ser capaz de alterar el comportamiento futuro del sistema, por lo cual para que pueda ser satisfactoriamente aplicado es necesario que tengamos disponible:

1. Un propósito u objetivo que está relacionado con el estado futuro del sistema.

2. Un conjunto de posibles acciones a realizar. Si no es posible llevar a cabo ninguna acción el control no puede ser ejercido y el sistema seguirá su curso sin ser modificado.

3. (A menos que una estrategia de prueba y error sea adoptada) alguna manera de elegir la acción correcta que resulte en el comportamiento deseado.

Vemos que para lograr un control exitoso debemos de tener un objetivo definido que sea capaz de predecir adecuadamente todas las acciones disponibles.

La teoría de control fue desarrollada para sostener la emergente actividad de control automático. Históricamente, el control automático fue concebido para reemplazar a los humanos en los trabajos. El control automático es una disciplina compleja, para ver esto basta con considerar la cantidad de ingenio necesaria para transformar una situación controlada manualmente en una situación controlada automáticamente.

El punto de partida en el análisis de un sistema de control es su representación por un modelo matemático, generalmente ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias. La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente son lineales, ya que los modelos lineales son mucho más manejables y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles.

Sin embargo, los avances tecnológicos han generado una enorme variedad de nuevos problemas y aplicaciones que no son lineales. Por ejemplo, fenómenos no lineales tales como equilibrios múltiples, ciclos límites, bifurcaciones, corrimientos de frecuencia y caos, se observan comúnmente en aplicaciones modernas importantes en ingeniería, tales como sistemas de comando de vuelo, manipuladores robot, sistemas de autopistas automatizadas, sistemas de inyección de combustibles, etc. Tales fenómenos no lineales no se pueden describir mediante una dinámica de modelos lineales, por lo cual, es necesario el uso de sistemas no lineales.

Un sistema moderno posee muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre sí de una forma complicada. Para analizar un sistema de este tipo, es necesario reducir la complejidad de las expresiones matemáticas, además de recurrir a computadoras que realicen una gran cantidad de los

tediosos cálculos necesarios. El enfoque de espacio de estados es el más conveniente desde este punto de vista [7].

La idea de *espacio de estados* proviene del método de variable de estado para describir las ecuaciones diferenciales. En el método, los sistemas dinámicos se describen por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden en variables denominadas estados, y la solución se puede considerar como una trayectoria en el espacio. El diseño de control en espacio de estados es una técnica por la cual se diseña la compensación empleando directamente la descripción de las variables de estado del sistema.

Las ventajas del diseño en el espacio de estados son evidentes cuando se diseñan reguladores para sistemas que tienen más de una entrada de control o más de una salida determinada. Una ventaja adicional del sistema espacio de estados es que la representación del sistema proporciona una descripción completa (interna) de dicho sistema, incluyendo las oscilaciones internas posibles o inestabilidades que pudieran estar ocultas por otros métodos de representación [6].

Por otra parte, en álgebra computacional también se han hecho avances significativos. En los últimos años nuestra habilidad para manipular sistemas de ecuaciones expresadas mediante polinomios ha experimentado algunas transformaciones cruciales. Comenzando con el descubrimiento de las bases de Gröebner por B. Buchberger a finales de los años 1960 y apoyado por el espectacular crecimiento de las capacidades de las computadoras modernas, muchas herramientas de la geometría algebraica han ganado importancia y, a su vez, la han hecho más accesible y aplicable. Recientemente, las bases de Gröebner han sido aplicadas a una multitud de problemas por su capacidad de resolver sistemas de ecuaciones polinomiales.

Las bases de Gröebner tienen muchas aplicaciones prácticas, una de ellas es la teoría de códigos correctores de errores que a su vez se aplica en la transmición de datos por medios digitales. Las bases de Göebner también resulven problemas del tipo teórico como:

- Dado un anillo conmutativo con identidad R, determinar si un polinomio $f \in R$ pertenece al ideal $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$.
- En caso de que pertenezca, determinar $u_1, \ldots, u_s \in R$ tal que

$$f = u_1 f_1 + \cdots + u_s f_s$$

Mencionamos solo estás dos aplicaciones porque son las de nuestro interés.

Los avances en computación nos hacen más accesible el álgebra y también la teoría de control. En este trabajo se hace uso de varios programas de computadora para realizar los cálculos. Se usa el programa Maple para calcular las derivadas de Lie del controlador ya que este programa posee una libreria que permite calcular derivadas, gradientes, productos punto, etc. Como se verá también es necesario escribir nuestros polinomios de forma única y esto se logra mediante definir un orden para los monomios. El programa libre Singular posee en sus librerias los órdenes monomiales que se mencionan en el presente trabajo, además está específicamente diseñado para cálculos con polinomios. También se hace uso del programa Matlab ya que posee librerias específicas para los problemas de control y posee el simulador Simulynk diseñado para el análisis de estos problemas.