

POR

ERNESTO ANTONIO GUERRERO LARA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN  
YUCATÁN-MÉXICO

Junio, 2008

©Derechos Reservados

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS



Categorías Lift y Objetos con Autoextensiones  
Triviales

Tesis que presenta

L.M. Ernesto Antonio Guerrero Lara

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Director de Tesis

Dr. Jesús Efrén Pérez Terrazas

Mérida, Yucatán

Junio 2008

*Dedicatoria*

*En memoria de un ángel, el Sr. Raúl Lara Zapata, ¡te quiero mucho abuelito!*

### *Agradecimientos*

A Dios por darme la sabiduría, inteligencia y guiar mi camino cada día.

A mi Madre, quien con su esfuerzo, ejemplo y amor ha hecho de mí un hombre preparado y de bien.

A mi Padre, quien me ha enseñado a luchar para nunca darme por vencido.

A María José, por su cariño sincero, paciencia, apoyo en la realización de esta tesis y alentarme en todos los momentos de mi vida.

A mi abuelita Elodia, mis hermanos Eddie, Edgar y Eduardo que los quiero mucho.

Al Dr. J. Efrén Pérez, por su enseñanza, paciencia y estar siempre atento en todos los detalles de esta tesis.

A mi familia y amigos.

A todos ellos, ¡que Dios los bendiga!

*¡Gracias!*

# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>3</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>4</b>
<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1. Conceptos y Resultados Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. Categorías . . . . .	9
1.2. Categoría de Módulos . . . . .	10
1.3. Anillos Artinianos . . . . .	14
1.4. R-Categorías y Álgebras de Artin . . . . .	15
1.5. Anillos de Matrices Triangulares . . . . .	16
<b>2. Categorías Exactas</b>	<b>17</b>
2.1. Pares Exactos . . . . .	17
2.2. Morfismos . . . . .	19
2.3. Estructuras Exactas . . . . .	23
2.4. Axiomas $GR$ y $GR^{op}$ . . . . .	37
2.5. Suma de Baer . . . . .	41
2.6. Aplicación . . . . .	50
<b>3. Categorías Lift (de Levantamiento)</b>	<b>53</b>
3.1. La Categoría Lift . . . . .	53
3.2. Una Estructura Exacta en Categorías Lift . . . . .	56
3.2.1. Pullback y Pushout: Los axiomas de Keller . . . . .	60
3.2.2. Suma de Baer . . . . .	63
3.3. Funtores de Reducción . . . . .	64
<b>4. <math>K</math>-especies de un Eje</b>	<b>77</b>
4.1. Gráficas Valuadas y Transformaciones de Coxeter . . . . .	77
4.2. $K$ -especies y Funtores de Coxeter . . . . .	79
4.3. Preproyectivos y Preinyectivos . . . . .	83
4.4. Módulos con Autoextensiones Triviales . . . . .	93
4.5. Clasificación de Módulos con Autoextensiones Triviales . . . . .	96
4.6. Objetos con Autoextensiones Triviales . . . . .	99
<b>Conclusión</b>	<b>102</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>104</b>



# Introducción

El objetivo de esta tesis es dar una prueba detallada de que en una Categoría Lift  $\xi(R)$ , los objetos inescindibles de autoextensiones triviales conforman, a lo más, una clase de isomorfía para cada  $R$ -módulo adyacente.

En el capítulo 1 mencionaremos resultados que son conocidos para personas familiarizadas en estos temas y por eso no se realizan sus demostraciones, sin embargo, mencionaremos las referencias para que las personas que se interesen puedan consultarlas.

En la categoría de módulos se pueden estudiar los conceptos de pushout, pullback y extensiones. Las categorías exactas nos permiten generalizar estos conceptos que serán una herramienta importante para estudiar dichas categorías. En los 70's, se demostró mediante los trabajos de Gabriel, Ringel y Dlab que, en  $K$ -especies, la dimensión de los endomorfismos y la dimensión de las autoextensiones son conceptos importantes para clasificar los módulos finitamente generados sobre dichas  $K$ -especies. Es por esto que en el capítulo 2 estudiamos las categorías exactas (concepto moderno que se desarrolló en los 90's), las extensiones asociadas, demostramos que las extensiones tienen estructura de bimódulo, desarrollamos la suma de Baer en estructuras exactas realizando pruebas detalladas para beneficio del lector incluso si conoce este concepto en la categoría de módulos.

En el capítulo 3 definimos las categorías Lift y las herramientas con las que trabajaremos. Estudiamos, analizamos y explicamos con más detalle los conceptos desarrollados por Crawley-Boevey a finales de los 80's y principios de los 90's con los cuales intentó generalizar los resultados importantes de la teoría de representaciones obtenidos por Yuriy Drozd en las álgebras de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado. También determinamos los funtores de reducción que nos permiten trasladar problemas de una categoría Lift a otra donde se convierten en problemas "más sencillos", estudiamos como se transforman las autoextensiones bajo estos funtores y demostramos la sucesión exacta Bautista-Zuazua que relaciona las dimensiones entre las extensiones obtenidas al aplicar ciertos funtores de reducción. Es necesario destacar que se expresan los resultados de la suma de Baer así como la estructura canónica de bimódulo que tienen las autoextensiones en categorías exactas y con fórmulas muy precisas en categorías Lift.

En el capítulo 4 estudiamos con detalle la categoría de módulos de una  $K$ -especie de un sólo eje. En dicha categoría, demostramos que un objeto no necesariamente inescindible que tiene autoextensiones triviales en tal  $K$ -especie, está totalmente determinado hasta isomorfía por su dimensión como espacio vectorial en cada vértice. En el resultado del capítulo usamos este hecho y un proceso inductivo sobre ciertas categorías Lift para obtener el resultado principal que enunciamos al principio de esta introducción. Este resultado fue probado por Bautista-Zuazua en el 2005 y aquí presentamos un desarrollo más explícito y detallado, así como resultados de los funtores de reducción que no se obtuvieron en Bautista-Zuazua y se publicaron por el Dr. J. Efrén Pérez Terrazas en *Lift Categories and objects with space of selfextensions of dimension one* [3].

