Índice general

1. Categorías Lift **4**
1.1. Pares y Categorías Lift 4
1.2. Morfismos de Pares Lift 13

2. Algunos resultados sobre Categorías Lift **19**
2.1. El caso general 19
2.2. El caso semisimple 42

3. Regularización y Funtores de Reducción **55**
3.1. Regularización. 55
3.2. Funtores de Reducción. 64
3.3. Estructuras Exactas 77

4. Estructuras Exactas y Funtores de Reducción **84**
4.1. Morfismo inducido por un funtor exacto 84
4.2. Morfismos inducidos por Funtores de Reducción 85

Introducción

Un álgebra se dice de Artin si es finitamente generada como módulo sobre su centro y su centro es un anillo artiniano. Estudiar las representaciones de un álgebra de Artin R es equivalente a estudiar la categoría $R-Mod$ de $R-$módulos izquierdos finitamente generados. Se sabe que todo $R-$módulo finitamente generado se escribe como suma directa de un número finito de $R-$módulos inescindibles y esta descomposición es única salvo orden e isomorfismo.

Así basta hallar todas las clases de isomorfía de estos módulos inescindibles, lo cual no es fácil, pero si se reducen las condiciones al anillo R se conoce una forma para encontrar todas estas clases de isomorfía y es cuando decimos que el álgebra es mansa, en caso contrario decimos que es salvaje. Es por todo esto que los módulos inescindibles juegan un papel importante en el estudio de $R - Mod$.

Una herramienta útil desarrollada para clasificar las álgebras de Artin ya sea en mansa o salvaje es el bocs, sin embargo, estos objetos no son muy tratables, es por ello que W. W. Crawley - Boevey introduce en [2] el concepto de categorías lift y funtores de reducción para simplificar el estudio de las representaciones de álgebras de Artin como alternativa a los bocses.

Un par lift (R, ξ) consiste de un anillo R y una sucesión exacta de $R-$bimódulos $\xi : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} R \longrightarrow 0$. A cada par lift le asociamos su categoría lift $\xi(R)$.

En este trabajo se presentan de manera detallada demostraciones de los resultados presentados por W.W. Crawley - Boevey sobre categorías lift y ciertos funtores, llamados funtores de reducción, por lo cual podrá utilizarse de referencia para trabajos posteriores. Otro factor que motivó la realización del trabajo es lo relativamente nuevo del tema y que aún no se estudian cursos relacionados con el mismo a nivel licenciatura y maestría.

En el primer capítulo se presentan los conceptos básicos sobre pares y categorías lift. El resultado principal es que la categoría lift $\xi(R)$ es equivalente a la categoria de conecciones, la cual denotaremos por I_ξ. Al ser equivalentes estas categorías, tanto sus objetos como morfismos están relacionados entre sí, al igual que sus diagramas conmutativos correspondientes, por lo que trabajar con una u otra categoría es indistinto, sin embargo, alguna de ellas podría simplificar en gran parte resultados y pruebas posteriores. Se demuestra también que un morfismo de pares lift induce ciertos funtores, se estudian las propiedades de dichos funtores y se presenta un ejemplo para clarificar los resultados.

En el capítulo 2 se estudian los pares lift (R, ξ) considerando los casos cuando R es un anillo en general, R es perfecto izquierdo, R es semiperfecto y R es semisimple artiniano. La consideración de estos casos nos lleva a desarrollar todos los resultados en teoría de anillos. Dentro de estas consideraciones se demuestra también que la categoría lift $\xi(R)$ es una categoría aditiva con coproductos arbitrarios e idempotentes que se dividen.

En el tercer capítulo se definen los funtores de reducción F_I, F_N y F_X, donde I es un ideal del anillo R, N es un submódulo de M y $X = (P, \overline{e})$ es un objeto en la categoría asociada al par lift (R, ξ_N). También se analizan propiedades interesantes de dichos funtores tales como su plenitud, fidelidad y densidad, de acuerdo a las condiciones dadas para el ideal I y los módulos N y P. Se introduce el concepto de extensión y a partir de este se demuestra la existencia de sucesiones exactas cortas derivadas de este concepto.

En el último capítulo se comienza el estudio con las definiciones de funtores exactos (covariantes y contravariantes), uno de los resultados importantes en este capítulo es que si F es un funtor exacto entonces induce un morfismo entre extensiones $Ext_{\varepsilon}(X, Y) \xrightarrow{F} Ext_{\varepsilon'}(F(X), F(Y))$ de $End_A(X) - End_A(Y)-$bimódulos y como los funtores de reducción estudiados en el capítulo 3 son exactos, cada uno de ellos induce un morfismo entre extensiones, lo cual nos lleva al resultado principal de esta sección que es la existencia de la sucesión exacta corta de $End_{\xi_X(R_X)}(Y) - End_{\xi_X(R_X)}(Z)-$bimódulos

$$Ext_{\xi_X(R_X)}(Z, Y) \xrightarrow{\Psi_X} Ext_{\xi(R)}(Z', Y') \xrightarrow{\Psi_N} Ext_{\xi_N(R_N)}(F_N(Z'), F_N(Y'))$$

que relaciona de manera global los morfismos inducidos por cada uno de los funtores de reducción.