UADY
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CURVATURA DE VARIEDADES RIEMANNIANAS Y LA CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

L.M. OSCAR IVÁN MUÑOZ CARBALLO

DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSÉ MATÍAS NAVARRO SOZA

MÉRIDA, YUCATÁN, MÉXICO
NOVIEMBRE, 2007

A mis padres.

Índice general

Agradecimientos

A Dios, por proveerme de todo lo necesario, y permitirme el privilegio de estudiar y cumplir meta tras meta a lo largo de todo este tiempo.

A mis padres, Jorge Muñoz Sansores y Lucelly Carballo Martínez, por su apoyo incondicional durante toda mi vida. Gracias por haberme enseñado con su valioso ejemplo a fijarme grandes metas y perseverar hasta conseguirlas.

A mi asesor, Dr. José Matías Navarro Soza, por darme la oportunidad de trabajar con él en este proyecto. Su instrucción académica, así como su atención, motivación y profesionalismo han sido invaluables en mi crecimiento personal. Muchas gracias por todo.

A mis maestros, quienes compartieron conocimientos, tiempo y amistad conmigo, e influenciaron positivamente mi formación académica y personal con su apoyo y comentarios, especialmente a Ramón Peniche, Didier Solís, Belén Gamboa, Jorge Lugo, e Israel García. Muchas gracias por su apoyo y paciencia. Un agradecimiento especial a Israel García por sus comentarios en cierta etapa de este trabajo.

Finalmente, a mi familia y amigos, quienes han estado conmigo todo este tiempo, dando muestra de su afecto y apoyo incondicionales. Agradezco de manera muy especial a Daniela, Tania, Reymundo, Heidy, Edith, Julio, Abigail, Fadelli, Miguel Ángel, y todos aquellos que forman una parte muy especial de mi vida.

Mi más sincero agradecimiento a todos.

Mérida, Yucatán, México. Oscar Iván Muñoz Carballo.
Noviembre 2007.

Introducción

El Teorema de Gauss-Bonnet es probablemente el teorema más profundo en la geometría diferencial de superficies. La idea que le dio origen surgió en la antigua Grecia, pero se formalizó con el trabajo de Gauss en el siglo XIX, y desde entonces ha experimentado varias generalizaciones incluyendo la famosa prueba intrínseca que obtuvo el matemático de origen chino Shiing-Shen Chern en 1944. La simplicidad y el carácter intrínseco de esta prueba hacen de la misma una joya invaluable, por lo que se considera a Chern el padre de la geometría diferencial moderna.

El Teorema de Gauss-Bonnet relaciona la integral de la curvatura Gaussiana sobre una superficie con la Característica de Euler de la misma. Todas las generalizaciones que se habían dado del Teorema de Gauss-Bonnet suponían que la variedad en cuestión se podía encajar en un espacio Euclidiano (de ahí su carácter extrínseco) y los geómetras se preguntaban acerca de si existiría una prueba del Teorema que no haga uso del encaje a un espacio ambiente Euclidiano, sino que dependa sólamente de las propiedades intrínsecas de la variedad. Chern logró obtener una tal prueba, la cual llenó de asombro a los geómetras de la época.

En el primer capítulo se desarrollan conceptos de vital importancia tales como haces tensoriales y vectoriales, y la teoría de diferenciacion exterior e integración de formas diferenciales en variedades.

En el segundo capítulo se estudia una cierta estructura definida en un haz vectorial arbitrario, llamada la conexión, la cual permitirá “derivar”las secciones de dicho haz. Se estudian principalmente las conexiones afines, y se abordan conceptos tales como la diferencial absoluta de un campo tensorial y la curvatura. Se estudian las conexiones sobre haces de marcos y se deducen las llamadas ecuaciones de estructura de la conexión.

En el último capítulo se estudian las propiedades de las variedades dotadas de una métrica Riemanniana. Se demuestra el Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana y se deducen importantes propiedades de la conexión de Levi-Civita y del uso de coordenadas normales. Se discuten importantes aspectos de la curvatura seccional, y se concluye con los detalles de la famosa prueba intrínseca de Chern del Teorema de Gauss-Bonnet [1].