Persistencia Uniforme para Sistemas de Reacción y Difusión con Retardo

por

REYMUNDO ARIEL ITZÁ BALAM

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

YUCATÁN-MÉXICO

Octubre, 2007

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Persistencia Uniforme para Sistemas de Reacción y Difusión con Retardo

Tesis que presenta

L.M. Reymundo Ariel Itzá Balam

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Directores de Tesis

Dr. Eric Ávila Vales

Dr. Ángel Estrella González

Mérida,Yucatán Octubre 2007

Dedicatoria

Con amor a mis padres

y

a mi novia

Agradecimientos

A mi Dios, por sus bendiciones.

A mis padres Ariel Itzá y Bárbara Balam, por sus consejos, paciencia e incondional apoyo.

A mi novia Heidy Escamilla por ser mi amor, amiga y compañera.

A mis tios (a los cuales considero como hermanos) Conchita y Emiliano, por apoyarme en momentos difíciles.

A mis amigos: Abigail Barroso, Fadelli Pérez, Edith Pech, Julio Che, Oscar Muñoz y Miguel Uh, por su amistad durante todos estos años de mi formación profesional.

A mi amiga y maestra Celia Villanueva, por sus consejos y su confianza tan noblemente depositada en mí, sin su confianza no hubiese llegado a este momento.

A mis amigos y profesores: Matiás Navarro, Ramón Peniche, Didier Solis, Belén Gamboa, Israel García, pues ellos ayudaron e influenciaron directamente en mi formación académica.

A mis amigos que conocí en la olimpiada de matemáticas.

Por último, y no por ello menos importantes (de hecho fueron muy importantes) a los que fueron mis guías en estos últimos 2 años, doctores Eric Ávila y Angel Estrella. Por haber confiado en mi trabajo, en mi capacidad y darme la mano en momentos duros; así como sus valiosas aportaciones al trabajo que presento y consejos a mi vida profesional.

A los que aquí no menciono, pero que confiaron en mí, considérense en esta lista...

¡Gracias!

Índice general

Introducción

En pleno siglo XX, Lotka y Volterra introducen la idea de estudiar la dinámica en las poblaciones (con sus limitaciones en cuanto a suposiciones espaciales), y a fines de dicho siglo esta idea cobra mayor importancia, la cual lleva al estudio de ecuaciones de reacción y difusión. Usualmente las ecuaciones de reacción y difusión son de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(x, t, u(x,t)) \tag{1}$$

En ocasiones, estas ecuaciones pueden modelar una población que depende de un tiempo anterior, estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de reacción y difusión con retardo, como un ejemplo, tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} = &\quad \Delta u \\ &\quad + F(x, t, u(x,t), u(x, t-T))\end{aligned} \tag{2}$$

Sabemos lo importante que es estudiar estas ecuaciones diferenciales parciales, por sus multiples aplicaciones en diversas ramas de la ciencia. Sin embargo, ya sea en (1) o (2) un resultado que se persigue (desde su origen), es describir la dinámica de la población.
Una de las preguntas naturales que surge es la siguiente: Dada una población ¿Se puede garantizar la existencia o predecir la extinción de una especie?
La persistencia uniforme, es un concepto muy importante en el estudio de poblaciones, porque caracterizan la supervivencia a largo plazo de alguna o todas las especies que interactuan en un ecosistema. Desde el punto de vista abstracto, la persistencia uniforme, nos da idea de

cuando dos subconjuntos se repelen (para ser precisos, un conjunto cerrado y su complemento); y esto brinda una estimación uniforme para los conjuntos omega límite, los cuales juegan un papel importante en la dinámica global.

Estudiaremos la solución de la ecuación (con valores iniciales y restriciones en la frontera)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \quad & d\Delta u \\ & +uF(x,t,u,u_t) \end{aligned} \tag{3}$$

con el concepto de persistencia presentado anteriormente.
Se han dado algunos resultados para problemas como en (1) cuando el retardo no se involucra en la reacción ($F(x,t,u)$, ver en [5]). A continuación se enuncia la proposición que en el artículo se presenta

Proposición 0.1. *Supongamos que Σ tiene un atractor global y es uniformemente persistente respecto a ($Int(X_+) \times Y, \partial X_+ \times Y$). Entonces el sistema de Kolmogorov parabólico generado por (1), es uniformemente persistente.*

Donde Σ es un semiflujo quasi-producto (skew product semiflow), Int(X_+) es un espacio donde los valores iniciales del sistema son válidos, ∂X_+ representa el complemento de X_+.

En esta proposición, el semiflujo quasi-producto (skew product semiflow) se usa cuando la ecuación es no autónoma. En este tipo de resultados, es usual manejar esta clase especial de semiflujos, donde queda claro la necesidad de definir, estudiar y entender estos semiflujos. Se pueden dar resultados para la ecuación (2) cuando la especie y el tiempo no estan presentes en la reacción ($F(x,,u_t)$, ver en [6]).
Para el estudio de la solución del sistema de Kolmogorov parabólico generado por (3), se

dará la definición de un semiflujo quasi-producto (skew product semiflow) similar al presentado en [4], desde el punto de vista de Hino y Murakami (ver [3]) . En [5] se presentan dos lemas, que son indispensables para la prueba de la proposición anterior, relacionado al concepto de persistencia. Uno de los lemas relaciona las cubiertas acíclicas con la descomposición de Morse; y el otro relaciona la persistencia de la solución con la persistencia del semiflujo quasi-producto (skew product semiflow).

Una vez definido el semiflujo quasi-producto (skew product semiflow) asociado al problema generado por (3), con el apoyo de un lema se concluirá la persistencia del sistema, es decir, extendemos el resultado de [5] para el sistema generado por (3).

En el Capítulo 1, se presentarán definiciones, proposiciones, lemas, etc., que se consideran básicos. Muchos de ellos solo se mencionarán y no se dará prueba alguna. También se definirán espacios de funciones conocidos y que se utilizarán para definir las soluciones de nuesro problema. Para ver pruebas de los resultados presentados en este capítulo, se recomienda consultar libros de análisis matemático, como [11]. En el Capítulo 2, enunciaremos resultados básicos que nos serán de útiles y muchos de estos resultados se aceptaran sin prueba alguna, debido a que no es el objetivo del trabajo. Estos resultados son considerados como clásicos en sistemas dinámicos. Finalmente en el Capítulo 3, trabajaremos sobre nuestro problema. Empezaremos por dar resultados sobre la existencia y unicidad de la solución del problema, así como algunas propiedades; se seguirá con un par de definiciones y se concluirá presentando un teorema de persistencia uniforme para el problema presentado.