# Contenido

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi madre, mi esposa y hermanos por permitirme llegar hasra este punto en mi vida puesto que todos sus actos dirigidos a mí fueron son y serán cruciales para ser la persona que hasta ahora he sido.

Un especial y gran agradecimiento a mi asesor de tesis, el **Dr. Matias Navarro Sosa** por su ayuda en la elaboración de este trabajo y por todo el tiempo brindado, y la amistad ofrecida en el tiempo que hemos trabajado juntos; sin él, esto no hubiera sido posible.

También agradezco a mis amigos todos mis compañeros de trabajo que enlistarlos no sería prudente pues al omitir a alguno de ellos estaría siendo injusto pues la amistad por ellos proprcionada es invaluable.

Roger Enrique Muñoz Puch.

# INTRODUCCIÓN

Los fundamentos de la teoría de los sistemas dinámicos comenzaron a ser estudiados por Poincaré en Francia, luego por Liapunov, Andronov, Kolmogorov y Arnold en Rusia y por Birkhoff y Smale en Estados Unidos. En Brasil, Peixoto y Palis siguieron desarrollando la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos, la cual se concentra en la estructura topológica de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en lugar de la solución analítica cuantitativa. Parte de esta teoría trata con conceptos básicos de genericidad, estabilidad estructural e hiperbolicidad, entre otras. Cada ecuación diferencial ordinaria puede verse como un sistema dinámico o también como un campo vectorial en una variedad diferenciable adecuada o también como un difeomorfismo entre variedades. En particular, en el conjunto de los campos vectoriales diferenciables se estudian campos vectoriales con ciertas propiedades. Si la estructura topológica de las curvas integrales es persistente bajo pequeños cambios del campo vectorial, significa que esta estructura es estable desde el punto de vista de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos. Si además se tiene que el conjunto de los campos estructuralmente estables es grande desde cierta óptica, entonces adquieren mayor importancia. Esta medida de lo grande o pequeño que puede ser un conjunto de objetos en un espacio dado puede darse de varias maneras. Para una familia de sistemas dinámicos que dependen diferenciablemente de un número finito de parámetros existen dos maneras básicas de definir esta medida. Una de ellas es la medida de Lebesgue sobre el espacio de parámetros, con lo cual se dice que una propiedad es genérica si ésta se satisface en cierto dominio de parámetros excepto para un conjunto de medida cero. La otra manera es la siguiente. Una propiedad es genérica si se satisface para un conjunto que es una intersección numerable de subconjuntos abiertos densos. Si un subconjunto de un espacio topológico contiene una intersección numerable de conjuntos abiertos densos se dice que es residual. Así, podemos decir que una propiedad es genérica si se cumple en un subconjunto residual. La estabilidad estructural es un ejemplo de genericidad desde el punto de vista topológico, puesto que cualquier propiedad topológica de un sistema estructuralmente estable es invariante bajo pequeñas perturbaciones. El Teorema de Kupka-Smale da condiciones para que un campo vectorial diferenciable en una variedad compacta de dimensión arbitraria sea genérico en el espacio de todos los campos diferenciables en el sentido residual. Estas condiciones son:

1. los elementos críticos del campo (singularidades y órbitas periódicas) son hiperbólicas,

2. para dos elementos críticos cualesquiera, la variedad estable de uno de ellos intersecta transversalmente a la variedad inestable del otro.

El objetivo de esta tesis es demostrar con todo detalle y de la manera más directa posible, el Teorema de Kupka-Smale, proveyendo de los prerrequisitos necesarios para un estudiante de posgrado en matemáticas.

La tranversalidad que se menciona arriba es una noción clave para establecer muchas propiedades genéricas y el concepto de hiperbolicidad está íntimamente relacionado con derivadas de ciertos mapeos entre variedades, lo cual tiene una estrecha relación con el espacio tangente. En el capítulo 1 se dan los conceptos necesarios de la geometría y topología de los campos vectoriales en variedades. Uno de los prerrequisitos más fuertes es el teorema de la variedad estable, cuya demostración será el principal resultado del capítulo 2. Finalmente, en el capítulo 3 se enuncia y demuestra el Teorema de Kupka-Smale, proporcionando ejemplos ilustrativos. El autor de esta tesis se dará por bien servido si este trabajo induce algún interés en el estudio de esta rama de las matemáticas, que fué fascinante para mí.