

Nombre del Proyecto: GEOMETRIA DE ESPACIOS DE LONGITUD LORENTZIANOS.

Fecha de inicio: 1 de septiembre de 2018.

Fecha de término: 31 de agosto de 2019.

Responsable: Dr. José Matías Navarro Soza, Profesor Investigador Titular B, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, matias.navarro@correo.uady.mx

a) Introducción

Los *espacios de longitud* son objeto de estudio en un área muy activa de investigación. En particular, los *espacios de Alexandrov* han sido estudiados y desarrollados por un número bastante grande de matemáticos de primera línea, entre los cuales M. Gromov [G] figura entre los pioneros de mayor importancia. La determinación de *cotas para la curvatura* de espacios de Alexandrov ha resultado ser fundamental para generalizar muchos resultados de la geometría Riemanniana, los cuales han sido utilizados para resolver problemas donde la diferenciabilidad de las funciones involucradas no necesariamente cumple con la regularidad usual. Una técnica central para establecer dichas cotas de curvatura se basa en la *comparación de triángulos* en dos tipos distintos de espacios, uno con condiciones de regularidad más bajas que en el otro. Por ejemplo, entre un espacio de Alexandrov y los *espacios modelo* diferenciables de dimensión dos, es decir, *2-variedades Riemannianas* completas y conexas de curvatura seccional constante. Como en la geometría métrica, las nociones adecuadas para establecer cotas de la curvatura sintética basadas en la comparación de triángulos juegan un papel central en el desarrollo de estas teorías [BB]. En el contexto diferenciable Harris [H] fue pionero en establecer los métodos de comparación de triángulos en *variedades de Lorentz (o lorentzianas)*, mientras que Alexander y Bishop [AB] lo fueron para el caso *semi-Riemanniano* general considerando triángulos de carácter causal arbitrario. La necesidad de considerar métricas Lorentzianas con regularidad baja se originó al considerar el problema de valores iniciales para las ecuaciones de Einstein de la teoría de la relatividad general. Otra herramienta fundamental de la geometría de Lorentz que es fundamental en la investigación de la estructura global de espacio-tiempos es la *causalidad*. Las condiciones de causalidad se clasifican usando la llamada *escalera causal*, cuyos escalones determinan las relaciones lógicas entre estas condiciones. Cada nivel está determinado por propiedades específicas bien definidas. La *hiperbolicidad global* es la condición que define el escalón más alto. En relación con la existencia y unicidad de desarrollos globalmente hiperbólicos de datos iniciales para las ecuaciones de Einstein en el vacío, Choquet-Bruhat y Geroch [CBG] demostraron que, bajo ciertas condiciones, existe un desarrollo de los datos que resulta ser maximal en el sentido de que es una extensión de cualquier otro desarrollo. Estos desarrollos maximales forman una clase bien definida de soluciones de las ecuaciones de Einstein. Se sabe que la métrica involucrada en tales soluciones puede tener regularidad baja. Los resultados clásicos de Penrose-Hawking acerca de singularidades del espacio-tiempo también se han obtenido para métricas de Lorentz de regularidad baja. En este año, Kunzinger y Sämann [KS] describieron una teoría análoga a los *espacios de longitud* en el contexto de la geometría lorentziana y la teoría causal, de forma que recuperan resultados clásicos de la teoría causal con una generalidad mayor que la obtenida hasta ahora. Además, desarrollan una noción sintética de cotas de curvatura en estos espacios *a la Alexandrov*.

b) Objetivo

Encontrar relaciones entre conceptos de la geometría de Lorentz y la geometría métrica para analizar la estructura geométrica de los espacios de longitud Lorentzianos que satisfagan condiciones adecuadas para su estudio.

c) Metodología

Identificar los conceptos esenciales de la geometría lorentziana y de la teoría causal que son fundamentales para extender resultados conocidos de la geometría métrica de los espacios de Alexandrov hacia los espacios de longitud Lorentzianos.

d) Cronograma

Período	Metas	Actividades
septiembre-diciembre 2018	Estudio y revisión de la literatura publicada sobre espacios de longitud Lorentzianos. Análisis y descripción de las propiedades causales de espacios de longitud Lorentzianos.	Estudio y análisis de las referencias más importantes publicadas hasta la fecha. Sesiones de trabajo conjunto de investigación. Colaboración en la organización de las actividades del XV Coloquio de Geometría de la FMAT, así como de un Taller de técnicas modernas en geometría Riemanniana.
enero-agosto 2019	Desarrollo de una teoría de comparación en espacios de longitud Lorentzianos. Análisis de la estructura geométrica de espacios de longitud Lorentzianos de curvatura acotada.	Sesiones de trabajo conjunto de investigación. Escritura de un artículo de divulgación y/o investigación.

e) Productos esperados

Un artículo de divulgación y/o investigación.

Fuente de financiamiento

UADY, Facultad de Matemáticas, Cuerpo Académico de Geometría Diferencial, Sistemas Dinámicos y Aplicaciones.

Colaboradores

1. Oscar Palmas Velasco

Externo

Doctorado

oscar.palmas@ciencias.unam.mx

UNAM, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Nivel 2 del Sistema Nacional de Investigadores del CONACYT

Es un experto en el tema

2. Didier Adán Solís Gamboa

Interno

Doctorado

didier.solis@correo.uady.mx

UADY, Facultad de Matemáticas

Nivel 1 del Sistema Nacional de Investigadores del CONACYT

Es un experto en el tema

3. Waldemar Barrera Vargas

Interno

Doctorado
bvargas@correo.uady.mx
UADY, Facultad de Matemáticas
Nivel 1 del Sistema Nacional de Investigadores del CONACYT
Es un experto en el tema

Referencias

- [AB] S. B. Alexander and R. L. Bishop; *Lorentz and semi-Riemannian spaces with Alexandrov curvature bounds*; Comm. Anal. Geom. 16 (2): 251-282; 2008.
- [BE] J. K. Beem, P. E. Ehrlich and K. L. Easley; *Global Lorentzian Geometry*; Marcel Dekker; 1996.
- [BB] D. Burago, Y. Burago and S. Ivanov; *A course in metric geometry*; American Mathematical Society; 2001.
- [CBG] Y. Choquet-Bruhat and R. Geroch; *Global aspects of the Cauchy problem in general relativity*; Commun. Math. Phys. 14: 329-335; 1969.
- [G] M. Gromov; *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*; Birkhäuser; 2007.
- [H] S. G. Harris; *A triangle comparison theorem for Lorentz manifolds*; Indiana Univ. Math. J.; 31 (3): 289-308; 1982.
- [KS] M. Kunzinger and C. Sämann. *Lorentzian length spaces*. arXiv:1711.08990v2 [math.DG] 30 May 2018.
- [MS] E. Minguzzi and M. Sánchez; *The causal hierarchy of space-times*; Eur. Math. Soc.; 2008.
- [O] B. O'Neill; *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*; Academic Press; 1983.
- [P] R. Penrose; *Techniques of differential topology in relativity*; SIAM; 1972.