Mérida, Yucatán a 14 de enero de 2019

Nudos, Grupos Kleinianos y Geometría Hiperbólica.

Dr. Juan Pablo Navarrete Carrillo

Antecedentes:

Los grupos Kleinianos fueron introducidos por Henry Poincaré en los años 1880's como los grupos de monodromía de ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden en el plano complejo, y jugaron un papel importante en muchas ramas de las matemáticas a través del siglo veinte, por ejemplo en superficies de Riemann y en Teoría de Teichmuller, formas automorfas, dinámica holomorfa, geometría hiperbólica y conforme, teoría de 3-variedades, etc. Estos grupos se definen como subgrupos de PSL(2,C), que actúan en la esfera de Riemann con región de discontinuidad no vacía. Equivalentemente, se pueden considerar como grupos de isometrías del espacio hiperbólico real de dimensión tres, o como grupos de automorfismos conformes de la esfera de Riemann. Gran parte de la teoría de grupos Kleinianos se ha generalizado a grupos Kleinianos conformes en dimensiones superiores; i.e., a grupos de transformaciones conformes de la esfera S^n cuya región de discontinuidad sobre dicha esfera no es vacía. En [8] y [9] José Seade y Alberto Verjovsky introdujeron el concepto de grupos Kleinianos complejos como aquellos subgrupos G de PSL(n,C) actuando en el espacio proyectivo complejo de dimensión n, denotado CP(n), cuyo conjunto límite (ver [4]) $\Lambda(G)$ no es todo CP(n). En otras palabras, un subgrupo G de PSL(n+1,C) es Kleiniano complejo si, y sólo si su región de discontinuidad $\Omega(G) = CP(n) - \Lambda(G)$ no es vacía.

En el artículo [2] se ilustra una relación existente entre los vectores positivos de CP(2) y el espacio de cadenas no degeneradas. Esta relación permite estudiar el siguiente problema:

Dado un nudo $\gamma: S^1 \to S^3$, se puede considerar a S^3 como la frontera del espacio hiperbólico complejo de dimensión dos y se puede definir

$$\Lambda(\gamma) = \cup_{p \epsilon \gamma(S^1)} l_p$$

Donde l_p denota a la única línea compleja que es tangente a S^3en el punto p. Si usamos la notación $\Omega(\gamma) = CP(2) - \Lambda(\gamma)$.

No es difícil verificar que $\Lambda(\gamma)$es cerrado y $\Omega(\gamma)$ es abierto. Algunas cuestiones interesantes relacionadas con esta situación son, por ejemplo, encontrar el número de componentes conexas de $\Omega(\gamma)$, describir el tipo topológico de cada componente de $\Omega(\gamma)$, o describir topológicamente al conjunto $\Lambda(\gamma)$. Motivado por lo anterior, propongo los siguientes temas de estudio:

Objetivos Específicos:

1. Consideramos el nudo toroidal γ en la esfera S^3 que se obtiene intersectando con la curva algebraica $y^q = x^p$, donde p y q son primos relativos. Uno de los problemas a resolver consiste en determinar la naturaleza topológica del conjunto $\Lambda(\gamma)$, donde $\Lambda(\gamma)$ es la unión de todas las líneas complejas tangentes a S^3 en puntos de γ. Si $S(\gamma)$ denota el conjunto de los puntos de intersección de dos líneas complejas tangentes a S^3 en puntos de γ, entonces existe evidencia para p y q pequeños que $\Lambda(\gamma) - S(\gamma)$ es la unión de max{p,q} toros sólidos ajenos. También conjeturamos que $\Omega(\gamma) = CP(2) - \Lambda(\gamma)$ tiene max{p,q}+1 componentes. Otro problema interesante que deseamos resolver consiste en determinar el tipo topológico de cada componente de $\Omega(\gamma)$.

2. Hallar el número mínimo de componentes de $\Omega(\gamma)$ cuando γ varía sobre la clase de isotopía del nudo γ en S^3. En particular para un nudo toroidal (p,q).

Metodología:

- Reuniones semanales de trabajo entre los participantes del proyecto.
- Revisión bibliográfica.

Productos esperados:

- Impartición de una conferencia externa a la Facultad de Matemáticas UADY, acerca de los resultados y avances obtenidos.
- Publicación de un artículo en una revista indexada acerca de los resultados y avances obtenidos.

BIBLIOGRAFÍA:

1. A. Cano, J. Parker, J. Seade, Action of R-Fuchsian groups on CP(2), Asian journal of mathematics., 20 (3). pp. 449-474 (2016).
2. A. Cano, W. Barrera, R. García, J.P. Navarrete, Chains homotopy in the complement of a knot in the sphere S^3, preprint.
3. W. Goldman, Complex hyperbolic geometry, Oxford University Press (1999).
4. Kulkarni, R.S., Groups with Domains of Discontinuity. Mathematische Annalen No. 237, pp. 253-272 (1978).
5. J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Maths. Studies 61, Princeton Univ. Press (1968).
6. J. P. Navarrete, On The Limit Set of Discrete Subgroups of PU(2,1), Geom. Dedicata 122, 1-13 (2006).
7. J. Seade, On Milnor's Fibration Theorem for Real and Complex Singularities, Singularities in Geometry and Topology Proceedings of the Trieste Singularity Summer School and Workshop (2005).
8. J. Seade y A. Verjovsky. Actions of Discrete Groups on Complex Projective Spaces. Contemporary Mathematics No. 269 pp. 155-178 (2001).
9. J. Seade y A. Verjovsky. Higher Dimensional Complex Kleinian Groups. Mathematische Annalen No. 322 pp. 279-300 (2002).
10. D. Rolfsen, Knots and Links, AMS Chelsea Publishing (2003).
11. M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol I, Publish or Perish, (1999).