

Nombre: _____

Probabilidad y Estadística (20 puntos)

(6 p.) Se lanza un dado tres veces. Calcule la probabilidad de que la suma de los tres números obtenidos sea mayor que 10 si se sabe que la suma de los dos primeros números es 5.

(6 p.) La estatura promedio de los 50 estudiantes de la Maestría en Ciencias de la Computación de la UADY es de 160 cm. Si el promedio de las estaturas de los varones es de 164 cm, y el promedio de las mujeres es de 153 cm, determine la cantidad de varones y mujeres inscritos en el programa.

(8 p.) Para evitar que individuos potencialmente peligrosos sean policías en México, se ha establecido un examen psicológico que los aspirantes deben aprobar como requisito para ser contratados. El defecto de esta prueba es que el 8 % de los individuos aptos reprueban el examen y quedan erróneamente descalificados, mientras que el 12 % de los que no son aptos aprueban el examen y son contratados por equivocación. Suponga que todos los que aprueban el examen son contratados. Si la experiencia muestra que sólo 85% de los policías contratados son aptos para el trabajo, determine el porcentaje de aspirantes que no son aptos.

Álgebra Lineal (25 puntos)

(6 p.) Responde V (Verdadero) o F (Falso) para cada una de las siguientes proposiciones:

a) Sea A una matriz cuadrada de orden n:	
- A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$	()
- Si el rango(A) = n, entonces A es invertible	()
- Si $Av = cv$ para alguna $c \in \mathbb{R}$, entonces v es un eigenvector para A.	()
b) Dos vectores son linealmente independientes si uno no es múltiplo escalar del otro.	()

(6 p.) Determina si la siguiente función es o no es lineal. Si es lineal, encuentra su matriz. Si no es lineal, proporciona un ejemplo que lo demuestre.

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + 2z \\ 2x - 4y + z \\ 100y + 7z \end{bmatrix}$$

(6 p.) Encuentra todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} -4x + 5z &= -2 \\ -3x - 3y + 5z &= 3 \\ -x + 2y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

(7 p.) Encuentra los eigenvalores de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Cálculo Diferencial e Integral (25 puntos)

(5 p.) Evalúa el siguiente límite, si existe: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$

(6 p.) Calcula la derivada de la siguiente función: $f(x) = x^3 \ln(x + 3)$

(6 p.) Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-4x^8}} dx$

(8 p.) Se desea construir una caja rectangular sin tapa con base cuadrada y un volumen de 500 cm^3 . ¿Qué dimensiones debe tener la caja para minimizar el área total de la superficie de las caras? Justifica que tu respuesta es realmente un mínimo global.

Programación (30 puntos)

(10 p.) Dado un vector A de n elementos enteros, define el algoritmo en pseudocódigo para encontrar los dos primeros valores mayores.

(10 p.) Sean dos vectores, A y B, que contienen secuencias de números enteros, donde A es de longitud n , y B de longitud m con $n \leq m$; define el algoritmo en pseudocódigo que determine si la secuencia de números del vector A se encuentra en el vector B, y si es así, en qué posición del vector B inicia. Por ejemplo, sean $A = [1, 2, 3]$ y $B = [4, 6, 1, 2, 3, 8]$, entonces, el algoritmo deberá afirmar que la secuencia de A está en B y que inicia en la posición 3.

(10 p.) El método de ordenamiento por conteo (counting sort en inglés) es un procedimiento que se utiliza para ordenar conjuntos de elementos que sean contables, por ejemplo, números enteros en un determinado intervalo, por medio del registro de la frecuencia de apariciones de un valor en el conjunto de datos. El primer paso consiste en determinar cuál es el rango de valores del conjunto de datos (valores mínimo y máximo). Después, se crea un vector de contadores para cada valor posible en el intervalo [mínimo, máximo], y a cada elemento se le da el valor inicial de 0 (0 apariciones). Luego, se recorren los valores del conjunto de datos uno por uno para contar cuántas veces aparece dicho valor en el conjunto. Al terminar de revisar todos los datos del conjunto, el vector de contadores ya contiene los elementos ordenados y sólo basta recorrer dicho vector para obtener la secuencia ordenada de datos. Por ejemplo, si se aplica el método de ordenamiento por conteo al conjunto de 10 números $\{2, 5, 3, 2, 7, 5, 3, 2, 2, 4\}$, primero buscamos el rango de los valores (mínimo 2, máximo 7), con esto, se crea el vector C que contiene 6 contadores, uno para cada entero en el intervalo [2,7]. Luego, se recorre la lista de números del conjunto de datos para contar las veces que aparece cada valor y se obtiene que el 2 aparece 4 veces ($C[2]=4$), el 3, 2 veces ($C[3]=2$), el 4, 1 ($C[4]=1$), el 5, 2 ($C[5]=2$), el 6 no aparece ($C[6]=0$), y el 7, 1 ($C[7]=1$). Con esto, ya podemos obtener la secuencia de valores ordenados al recorrer el vector C de contadores agregando en la secuencia el valor que corresponde a cada contador el número de veces que éste indica. Para el ejemplo, se obtiene la secuencia ordenada: 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 7 (el recorrido de C puede ser en orden ascendente o descendente según se requiera el orden de la secuencia).

Define el algoritmo del ordenamiento por conteo utilizando pseudocódigo.